QUESTION # 1 (5 points)

Une structure est soumise à une charge de 13 kN. La membrure AB est une poutre, la membrure BC est une tige de diamètre D_{BC}. Les détails des connexions formées de rotules sont indiqués (cisaillement simple ou cisaillement double). Les contraintes admissibles sont :

- Cisaillement des boulons $\tau_{max\text{-}adm}$ = 86 MPa
- Contrainte normale en tension dans la tige BC, $\sigma_{n,max\text{-}adm}$ = 112 MPa
- Contrainte de contact pour les boulons et les plaques d'acier, $\sigma_{b,max\text{-}adm}$ = 150 MPa

(A) Déterminez le diamètre minimal du boulon à A, d_A
(B) Déterminez le diamètre minimal du boulon à B, d_B
(C) Déterminez le diamètre minimal de la tige BC, D_{BC}
(B) Déterminez l'épaisseur minimale de la poutre AB, t_{AB}

RÉPONSES : (A) : Dia. boulon A, d_A = 9.38 mm ~10

(B) : Dia. boulon B, d_B = 14.16 mm ~15

(C) : Dia. tige BC, D_{BC} = 12.4 mm ~15

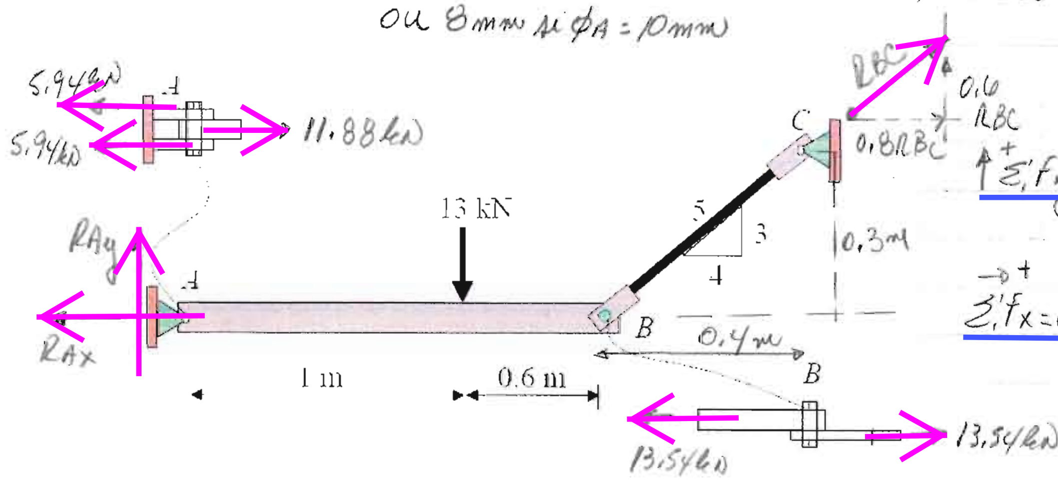
(D): Épaisseur AB, t_{AB} = 8.44 mm
ou 8 mm si ϕ_A = 10 mm

1. Calcul des réactions :

$\Sigma M_A = 0$ $\quad -13(1) + 0.6\,R_{BC}(2) - 0.8\,R_{BC}(0.3) = 0$

$-13 + R_{BC}(1.2 - 0.24) = 0$

$R_{BC} = \dfrac{13}{0.96} = 13.54\,kN$



$\uparrow + \ \Sigma F_y = 0$ $\quad R_{Ay} - 13 + 0.6(13.54) = 0$

$R_{Ay} = 4.88\,kN \uparrow$

$\rightarrow + \ \Sigma F_x = 0$ $\quad -R_{Ax} + 0.8(13.54) = 0$

$R_{Ax} = 10.83\,kN \leftarrow$

- Boulon A : Cisaillement double $\quad R_A = \sqrt{10.83^2 + 4.88^2} = 11.88\,kN$

- $A_A = \dfrac{V_A}{2\,\tau_{max\text{-}adm}} = \dfrac{11.88 \times 10^3\,N}{(2)\,86 \times 10^6\,N/m^2} = 6.907 \times 10^{-5}\,m^2 \rightarrow \times 10^6 = 69.07\,mm^2$

- $\dfrac{\pi}{4}(d_A)^2 = 69.07 \qquad d_A = \left[\dfrac{(4)(69.07)}{\pi}\right]^{1/2} = 9.38\,mm \rightarrow$ on utilise 10 mm

• Boulon B : cisaillement simple $R_{BC} = 13.54\,kN$

• $A_B = \dfrac{V_B}{\tau_{max\text{-}adm}} = \dfrac{13.54\times10^{3}\,N}{(1)\,86\times10^{6}\,N/m^2} = 1.574\times10^{-4}\,m^2 \rightarrow \times10^{6} = 157.4\,mm^2$

• $\dfrac{\pi}{4}(d_B)^2 = 157.4$ $\quad d_B = \left[\dfrac{(4)}{\pi}(157.4)\right]^{1/2} = 14.16\,mm$ on utilise 15mm

• Diamètre de la tige : $\sigma = F/A$ $\quad A = F/\sigma \rightarrow 112\,MPa$

$A_{BC} = \dfrac{13.54\times10^{3}\,N}{112\times10^{6}\,N/m^2} = 1.209\times10^{-4}\,m^2 \rightarrow \times10^{6} = 120.9\,mm^2$

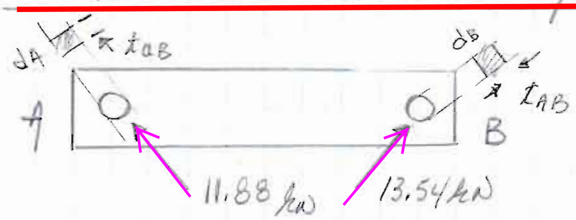
$\dfrac{\pi}{4}(D_{BC})^2 = 120.9\,mm^2$ $\quad D_{BC} = \left[\dfrac{4}{\pi}(120.9)\right]^{1/2} = 12.4\,mm$ on utilise 15 mm

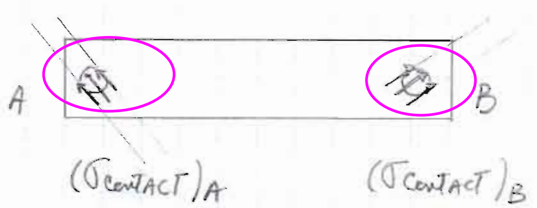
• Contraintes de contact et épaisseur

$\sigma_{contact} = F/A$ $\quad A = F/\sigma_{contact} \Rightarrow 150\,MPa$

$A_{contact} = t_{AB}\cdot d_{boulon}$

t épaisseur de la plaque





• Connexion A : $t_{AB}\cdot(0.00938) = \dfrac{11.88\times10^{3}}{150\times10^{6}}$

$t_{AB} = 8.44\times10^{-3}\,m$

$\boxed{= 8.44\,mm}$

• Note si on utilise des boulons de 10mm alors :

$t_{AB} = 7.92\,mm$

• Connexion B : $t_{AB}\cdot(0.01416) = \dfrac{13.54\times10^{3}}{150\times10^{6}} = t_{AB} \Rightarrow 6.37\times10^{-3}\,m$

$> \boxed{6.37\,mm}$

• Note si on utilise des boulons de 15mm alors $t_{AB} = 6.02\,mm$

∴ Connexion A contrôle : $t_{AB} = 8.44\,mm$ si $d_A = 9.38\,mm$

$\Rightarrow 7.92$ si $d_A = 10\,mm$

↳ utilise 8 mm avec d_A 10mm

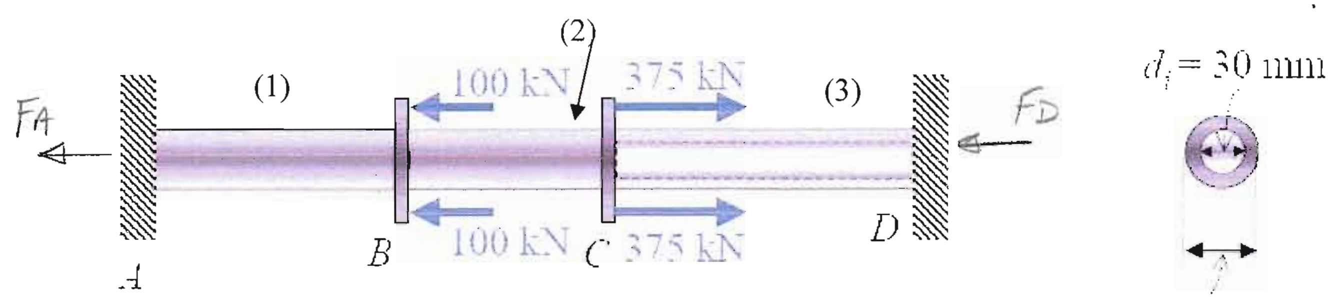
QUESTION # 2 **(5 points)**

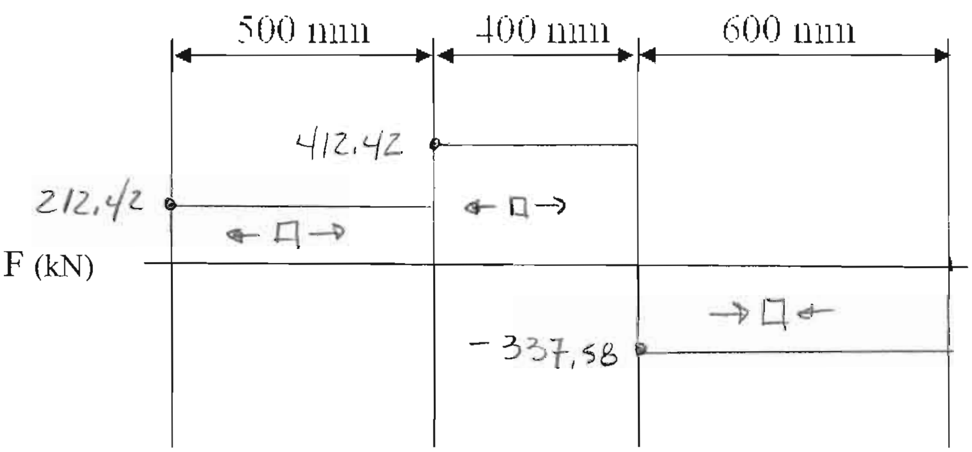
$(E = 200\,GPa)$

Deux tiges cylindriques en acier de sections pleines avec un diamètre de 60 mm (AB et BC) sont connectées à une tige d'acier cylindrique de section creuse (CD) avec un diamètre extérieur, do = 60 mm et un diamètre intérieur di = 30 mm.

(A) Dessinez le digramme des efforts internes axiaux, F, et calculez les contraintes normales, σ_1, σ_2, σ_3 le long de la tige en indiquant clairement si les valeurs sont en compression (-) ou en traction (+). Rapportez les valeurs des contraintes calculées dans la case réponse.

(B) Calculez les déplacements à B, U_B et C, U_C. Rapportez les valeurs calculées dans la case réponses. **UTILISEZ LA MÉTHODE DE FLEXIBILITÉ**





Réponses :

σ_1 = 75.1 MPa

σ_2 = 145.9 MPa

σ_3 = 159.2 MPa

U_B = 0.19 mm →

U_C = 0.48 mm ←

• Équilibre : B : $-F_1 - 200 + F_2 = 0$ $F_2 = F_1 + 200$

C : $-F_2 + 750 + F_3 = 0$ $F_2 = 750 + F_3$

$F_1 + 200 = 750 + F_3$

• Compatibilité : $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ $\boxed{e_i = F_i \left(\frac{L_i}{A_i E_i} \right) \quad N\text{-}m}$

$L_1 = 0.5\,m$ $L_2 = 0.4\,m$ $L_3 = 0.6\,m$ $E = 200 \times 10^9$

$A_1 = \pi \frac{(0.06)^2}{4} = 2.827 \times 10^{-3}\,m^2 = A_2$; $A_3 = \frac{\pi}{4}(0.06^2 - 0.03^2) = 2.121 \times 10^{-3}\,m^2$

3

$F_1 + 200 = 750 + F_3 \qquad F_3 = F_1 + 200 - 750 = F_1 - 550$

$$\bullet\ \frac{F_1(0.5)}{(2.827\times10^{-3})(\cancel{200\times10^9})} + \frac{F_2(0.4)}{(2.827\times10^{-3})(\cancel{200\times10^9})} + \frac{F_3(0.6)}{(2.121\times10^{-3})(\cancel{200\times10^{+9}})} = 0$$

$\bullet\ F_1(0.1769) + F_2(0.1415) + F_3(0.2829) = 0$

$\bullet\ F_1(0.1769) + (F_1 + 200)(0.4) + (F_1 - 550)(0.6) = 0$

$\bullet\ F_1(0.1769 + 0.4 + 0.6) = -80 + 330 = +250$

$\bullet\ F_1 = (250)/1.1769 = 212.42\ kN$

$\bullet\ F_2 = 212.42 + 200 = 412.42\ kN$

$\bullet\ F_3 = 212.42 - 550 = -337.58\ kN$

$\bullet\ \sigma_1 = F_1/A_1 = (212.42\times10^3)/2.827\times10^{-3} \Rightarrow \quad 75.1\ MPa$

$\bullet\ \sigma_2 = F_2/A_2 = (412.42\times10^3)/2.827\times10^{-3} \Rightarrow \quad 145.9\ MPa$

$\bullet\ \sigma_3 = F_3/A_3 = (-337.58\times10^3)/2.121\times10^{-3} \Rightarrow \quad 159.2\ MPa$

$$\bullet\ \vec{u}_B = \vec{e}_1 = \frac{(212.42\times10^3)(0.5)}{(2.827\times10^{-3})(200\times10^9)} = 1.878\times10^{-4}\ m = \overrightarrow{0.19\ mm}$$

$$\bullet\ \overleftarrow{u}_C = \overleftarrow{e}_3 = \frac{(-337.58\times10^3)(0.6)}{(2.121\times10^{-3})(200\times10^9)} = -4.774\times10^{-4}\ m = \overleftarrow{-0.48\ mm}$$

$$\text{NOTE } \vec{e}_2 = \frac{(412.42\times10^3)(0.4)}{(2.827\times10^{-3})(200\times10^9)} = 2.917\times10^{-4}\ m = \overrightarrow{0.29\ mm}$$

$$\boxed{e_1 + e_2 + e_3 = \overrightarrow{0.19} + \overrightarrow{0.29} - \overleftarrow{0.48} = 0 \qquad \text{OK.}}$$

QUESTION # 3 (5points)

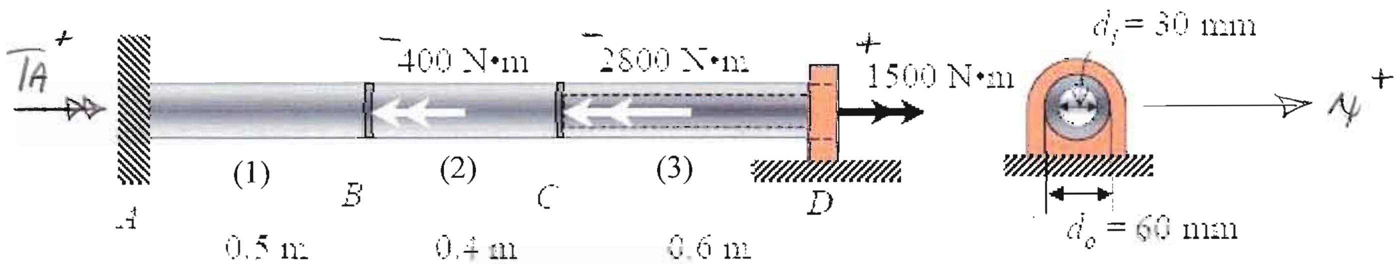
(G = 80GPa)

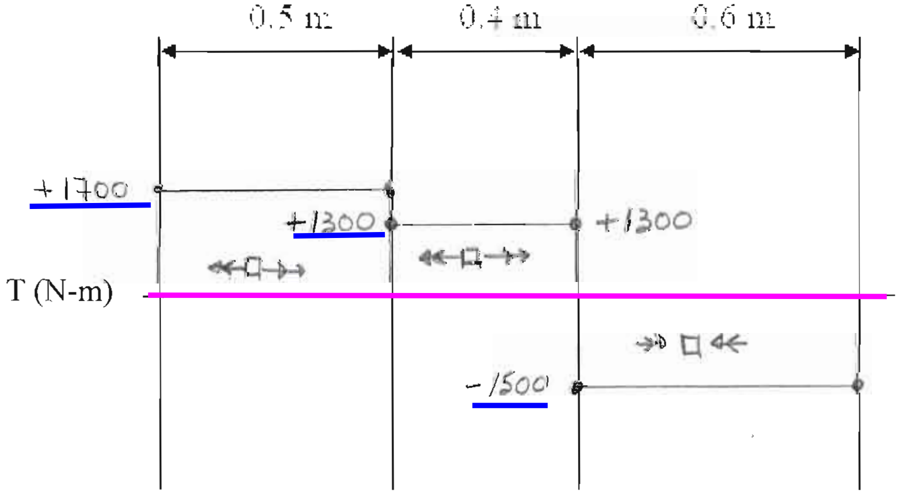
Deux tiges cylindriques en acier de sections pleines avec un diamètre de 60 mm (AB et BC) sont connectées à une tige d'acier cylindrique de section creuse (CD) avec un diamètre extérieur, do = 60 mm et un diamètre intérieur di = 30 mm. Le joint A est fixe et la rotation de l'arbre est libre au joint D.

(A) Dessinez le digramme des moments de torsion internes, T, et calculez les contraintes normales de cisaillement, τ_1, τ_2, τ_3 le long de l'arbre en indiquant clairement le sens des torques. Rapportez les valeurs des contraintes calculées dans la case réponse.

(B) Calculez la rotation du point D par rapport au point A, $\phi_{D/A}$ (rad). Rapportez la valeur calculée dans la case réponse.

(C) Calculez le torque à appliquer au point D, T_D, pour obtenir une rotation unitaire à D; ($\phi_{D/A}$ =1 rad) pour ce cas il n'y aucun autre torque qui est appliqué sur la structure.





Réponses

τ_1 = 40.09 MPa

τ_2 = 30.66 MPa

τ_3 = 37.72 MPa

$\phi_{D/A}$ = 0.00403 rad

T_D = 66000 N-m

1. REACTION TA : $T_A - 400 - 2800 + 1500 = 0$

$T_A = -1500 + 400 + 2800 = +1700 \text{ N}\cdot\text{m}$

(1) : $r_1 = 60\times10^{-3}/2 = 0.03 \text{ m}$ $\quad I_{p1} = \frac{\pi}{2} r_1^4 = \frac{\pi}{2}(.03)^4 = 1.272\times10^{-6} \text{ m}^4$

(2) : $r_2 = 60\times10^{-3}/2 = 0.03 \text{ m}$ $\quad I_{p1} = I_{p2} = 1.272\times10^{-6} \text{ m}^4$

(3) : $r_{3o} = 0.03 \text{ m}$; $r_{3i} = \frac{30\times10^{-3}}{2} = 0.015 \text{ m}$ $\quad I_{p3} = \frac{\pi}{2}(.03^4 - 0.015^4) = 1.193\times10^{-6} \text{ m}^4$

2. Contraintes $\boxed{\tau_i = \dfrac{T_i \cdot r_i}{I_{pi}}}$

$$\tau_1 = \frac{(1700)(0.03)}{1.272 \times 10^{-6}} \Rightarrow 40.09 \text{ MPa}$$

$$\tau_2 = \frac{(+1300)(.03)}{1.272 \times 10^{-6}} \Rightarrow 30.66 \text{ MPa}$$

$$\tau_3 = \frac{(-1500)(0.03)}{1.193 \times 10^{-6}} \Rightarrow 37.72 \text{ MPa}$$

3. Angle de Rotation : $\phi_{D/A}$ $\therefore$ A fixe

$$\phi_{D/A} = \phi_{D/C} + \phi_{C/B} + \phi_{B/A} \qquad \boxed{\phi_i = \frac{T_i \cdot L_i}{I_{pi}\, G_i}} \; ; \; \phi_i = T_i \underbrace{\left(\frac{L_i}{I_{pi} \cdot G_i}\right)}_{f_i}$$

$$= \phi_3 + \phi_2 + \phi_1$$

$$\phi_3 = \frac{(-1500)(0.60)}{(1.193 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} = -0.00943 \text{ rad}$$

$$\phi_2 = \frac{(+1300)(0.4)}{(1.272 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} = +0.00511 \text{ rad}$$

$$\phi_1 = \frac{(+1700)(0.5)}{(1.272 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} = +0.00835 \text{ rad}$$

$$+0.00403 \text{ rad}$$

4. (c) Calcul de $k^T \Rightarrow$ $\boxed{\text{Ressorts en series: } (f_1^T + f_2^T + f_3^T)^{-1} = k^T}$

$$\left(\frac{(0.6)}{(1.193 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} + \frac{(0.4)}{(1.272 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} + \frac{(0.5)}{(1.272 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)}\right)$$

$$(6.287 \times 10^{-6}) + (3.931 \times 10^{-6}) + (4.914 \times 10^{-6})$$

$$\Rightarrow (15.132) \times 10^{-6} \Rightarrow [f]^{-1} = 0.0660 \times 10^6 \Rightarrow 66 \times 10^3 \, \frac{\text{kN} \cdot \text{m}}{\text{rad}}$$

$$\boxed{66000 \, \frac{\text{N-m}}{\text{rad}}}$$

QUESTION # 4 (5 points)

Considérez la poutre isostatique ci-dessous:

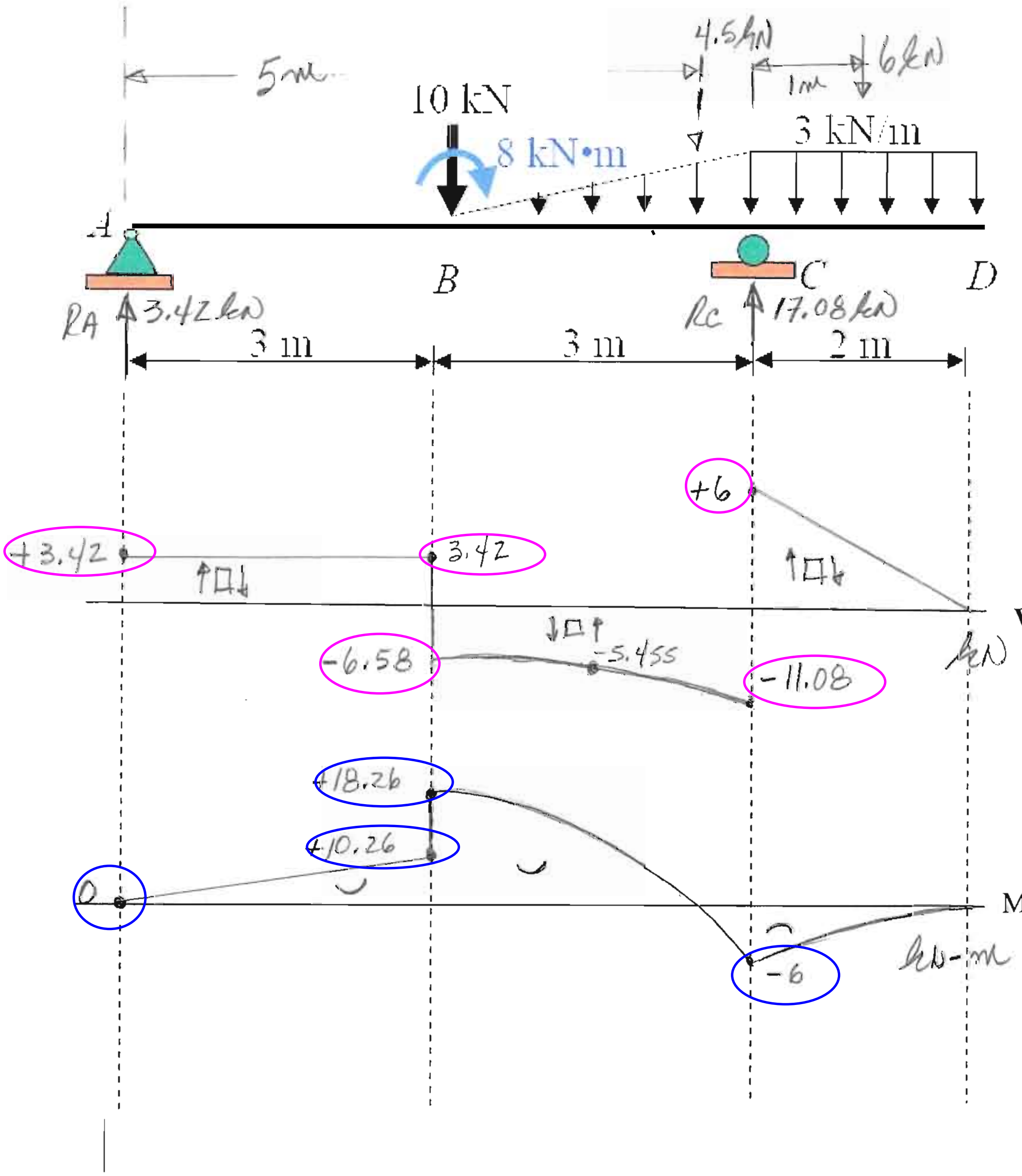
(A) Calculez les réactions R_A, R_C.

(B) Calculez et dessinez le diagramme des efforts tranchants V (kN) en indiquant les valeurs aux points A, B, C, D, ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

(C) Calculez et dessinez le diagramme des moments de flexion M (kN-m) en indiquant les valeurs aux points A, B, C, D, ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

Portez une attention particulière à la courbure concave ou convexe des segments de vos diagrammes.

RÉPONSES: RA= 3.42 kN; ~~RB~~ RC = 17.08 kN



1. CALCUL DES RÉACTIONS :

Rc : $\Sigma M_A = 0$

$RC \cdot 6 - 8 - 10(3) - 4.5(5) - 6(7) = 0$

$R_C = 102.5/8 = 17.08$ kN ↑

RA : $\uparrow^{+} \Sigma F_y = 0$

$RA - 10 - 4.5 - 6 + 17.08 = 0$

$RA = +3.42$ kN ↑

• DESSIN DE V

A : $+3.42$ kN

B^- : $+3.42$ kN

B^+ : $3.42 - 10 = -6.58$

C^- : $-6.58 - 4.5 = -11.08$

C^+ : $-11.08 + 17.08 = +6$

@ 4.5 m $V = -6.58 - (\frac{3}{2})(1.5)\frac{(1.5)}{2}$

$= 5.455$

(7)

• DESSIN DE M : (kN-m)

$A = 0$

$B^- = 0 + (3.42 \times 3) = 10.26$

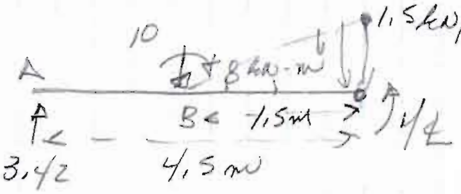
B^+ POUTRE A — 8 — POUTRE

$\underline{10.26}$ $8 + 10.26 = \underline{18.26}$

JOINT (B)

$C = -(6 \times 2)/2 = -6$ DCL C-D   aire C-D.

$M(4.5) =$



$\Sigma M_{\text{¢}} = 0 \quad -3{,}42\,(4{,}5) + 10(1{,}5) - 8 + \frac{(1{,}5)(1{,}5)}{2}\left(\tfrac{1}{3}\,1{,}5\right) + M_{\text{¢}} = 0$

$-15{,}39 + 15 - 8 + 0{,}5625 + M_{\text{¢}} = 0 \qquad M_{\text{¢}} = +7{,}82$

Ligne droite : $\frac{(18.26 + 6)}{2} = 12.13$; $18.26 - 12.13 = 6.13$

$7{,}82 > 6.13 \quad \therefore$