QUESTION # 1 (5 points)

Une structure est soumise à deux charges de 3 kN. La membrure CDEB est une poutre, la membrure AB possède des rotules à ses extrémités. Les connexions sont formées de rotules en cisaillement double aux supports A et C. Les contraintes admissibles sont :

- Cisaillement des boulons $\tau_{max\text{-}adm} = 45$ MPa
- Contrainte normale en tension dans la membrure AB, $\sigma_{n,max\text{-}adm} = 125$ MPa

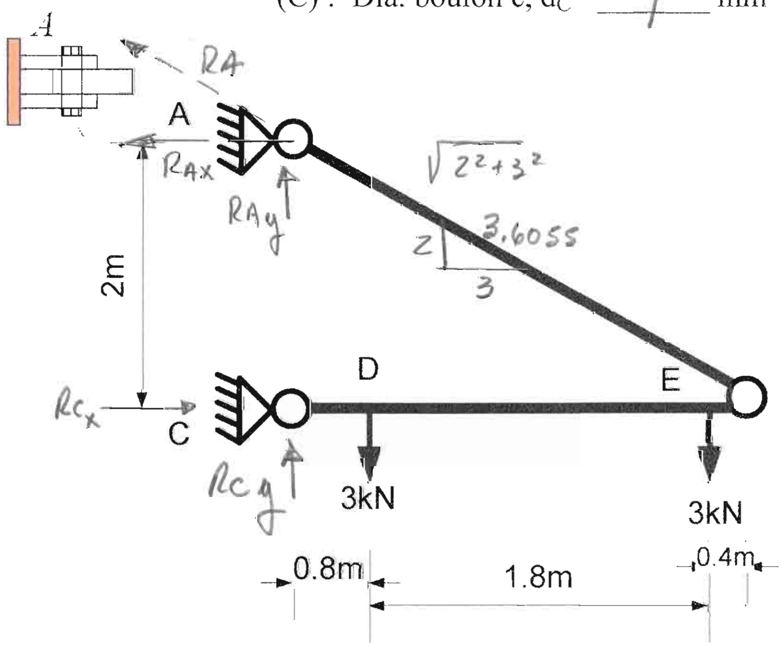
(A) Déterminez les réactions RA et RC
(B) Déterminez l'aire minimale de la membrure AB, A_{AB}
(B) Déterminez le diamètre minimal du boulon à C, dc

RÉPONSES :

(A): Réaction R_A= 6.129 (kN)
Réaction R_C = 5.72 (kN)

(B) : Aire AB; A_{AB} = 49 mm²

(C) : Dia. boulon c, d_C = 9 mm



1. Calcul des réactions :

- $\sum M_C = 0$ $R_{Ax}(2) - 3(0.8) - 3(2.6) = 0$

$R_{Ax} = 5.1$ kN

$R_{Ay} = 5.1\,(2/3) = 3.4$ kN

$R_A = 5.1\,(3.6055/3) = 6.129$ kN

- $\sum F_x = 0$ $R_{Cx} = R_{Ax} = 5.1$ kN

- $\sum F_y = 0$ $3.4 + R_{Cy} - 3 - 3 = 0$

$R_{Cy} = 2.6$ kN.

$R_C = \sqrt{5.1^2 + 2.6^2} = 5.72$ kN

2. Aire Membrure AB :

$F_{AB} = R_A = 6{,}129$ kN (T)

$A_{AB} = \dfrac{F_{AB}}{\sigma_{adm}} = \dfrac{6.129 \times 10^3\ N}{125 \times 10^6\ N/m^2}$

$A_{AB} = 4.9032 \times 10^{-5}\ m^2 = 49.032\ mm^2$

- 3 Diamètre Boulon à C

Aire Boulon cisaillement double $= \dfrac{R_C}{2\,\tau_{adm}} = \dfrac{5.72 \times 10^3}{2\,(45 \times 10^6)} = 6.3555 \times 10^{-5}\ m^2 \Rightarrow 63.55\ mm^2$

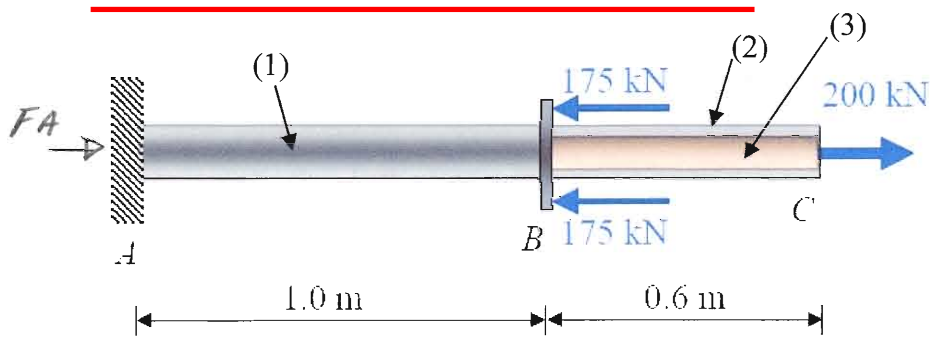
$d_C = \sqrt{\dfrac{4\ \text{Aire Boulon}}{\pi}} = [4\,(63.55)/\pi]^{1/2} = 8.995\ mm \Rightarrow 9\ mm$

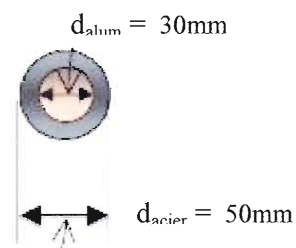
QUESTION # 2 (5 points)

Une tige cylindrique est constituée de deux segments AB et BC et de 3 éléments (1), (2), (3). Le segment AB (1) possède une section solide en acier d'un diamètre d_{acier} = 50 mm (E_{acier} = 200 GPa). Le segment BC est constitué d'une chemise d'acier (2) (d_{acier} = 50mm) et d'un noyau d'aluminium (3) d'un diamètre d_{alum}=30mm (E_{alum}=80 GPa).

(A) Dessinez le diagramme des charges axiales externe, F (kN) (le point A est fixe)
(B) Calculez les contraintes normales, σ_1, σ_2, σ_3 le long de la tige en indiquant clairement si les valeurs sont en compression (-) ou en traction (+). Rapportez les valeurs des contraintes calculées dans la case réponse.
(C) Calculez le déplacement à C, U_C. Rapportez la valeur calculée dans la case réponse.

UTILISEZ LA MÉTHODE DE FLEXIBILITÉ





Section – Segment BC

Réponses :

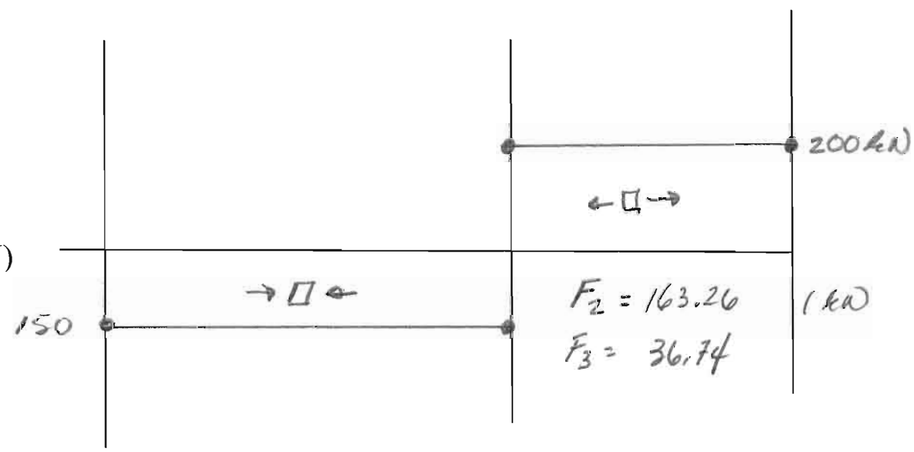
σ_1 = −76.39 MPa C

σ_2 = +129.92 MPa T

σ_3 = +51.97 MPa T

U_C = 7.85 $\times 10^{-3}$ mm

F (kN)



1. Calcul de la réaction à A : $\sum \vec{F_A} = 0$ $\quad F_A - 2(175) + 200 = 0$

$F_A = -200 + 2(175) = 150$ kN →

(A) DESSIN F(x)

(B) Calcul des contraintes normales (N-m)

$$A_{ac} = \frac{\pi (50 \times 10^{-3})^2}{4}$$

$$A_{ac} = 1.9635 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

A(1)

$$\sigma_1 (\text{isostatique}) = \frac{-150 \times 10^3}{1.9635 \times 10^{-3}}$$

$$\Rightarrow -76.39 \text{ MPa (C)}$$

σ_2 et σ_3 (hyperstatique) méthode flexibilité :

(ACIER) $F_2 \leftarrow$ $\square$ $\rightarrow 200$ kN
(ALUM) $F_3 \leftarrow$

DCL $\sum \vec{F}_x = 0$ $\quad -F_2 - F_3 + 200 = 0$

• Équilibre

$$-F_2 - F_3 = -200$$
$$F_2 + F_3 = +200$$

• **Compatibilité** $\quad e_2 = e_3 \quad$ même déplacement acier, alum.

$$\frac{F_2 L_2}{A_2 E_2} = \frac{F_3 L_3}{A_3 E_3}$$

$L_2 = L_3 = 0,6$ m

$A_2 = \frac{\pi}{4}(50^2 - 30^2) = 1256.64 \text{ mm}^2 = 1256,64 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$A_3 = \frac{\pi}{4}(30)^2 = 706.86 \text{ mm}^2 = 706.86 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

$$\frac{F_2}{(1256,64 \times 10^{-6})(200 \times 10^9)} = \frac{F_3}{(706,86 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)}$$

• $F_2 = 4.444\, F_3$

• $F_3 (4.444 + 1) = 200 \qquad F_3 = 36,74$ kN

$F_2 = 163,26$ kN $\quad \} \ \sum_i = 200$ kN ok

• **Contraintes** :

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{163.26 \times 10^3}{1256,64 \times 10^{-6}} \Rightarrow +129.92 \text{ MPa (T)}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_3}{A_3} = \frac{36.74 \times 10^3}{706,86 \times 10^{-6}} \Rightarrow +51.97 \text{ MPa (T)}$$

• **Déplacement** : $\quad u_C = u_{B/A} + u_{C/B} \qquad \sum_i F_i L_i / A_i E_i$

$$\underbrace{\frac{-150 \times 10^3 (1)}{(1.9635 \times 10^{-3})(200 \times 10^9)}}_{-3,8197 \times 10^{-4} \text{ m}} + \underbrace{\frac{36.74 \times 10^3 (0,6)}{706.86 \times 10^{-6} (80 \times 10^9)}}_{3.8982 \times 10^{-4}} =$$

$$-3,8197 \times 10^{-4} \text{ m} + 3.8982 \times 10^{-4} = 7.85 \times 10^{-6} \text{ m}$$
$$= 7.85 \times 10^{-3} \text{ mm}$$

QUESTION # 3 (5points)

Un arbre est constitué d'un tube d'aluminium (1) r_{al} = 30 mm ($\cancel{E}_{al}$ G = 80 GPa) qui est solidaire d'un noyau de bronze (2) de rayon r_{br} = 15mm (G_{br} = 35 GPa). Si on applique un torque T = 340 N-m.

(A) Calculez la réaction T_B

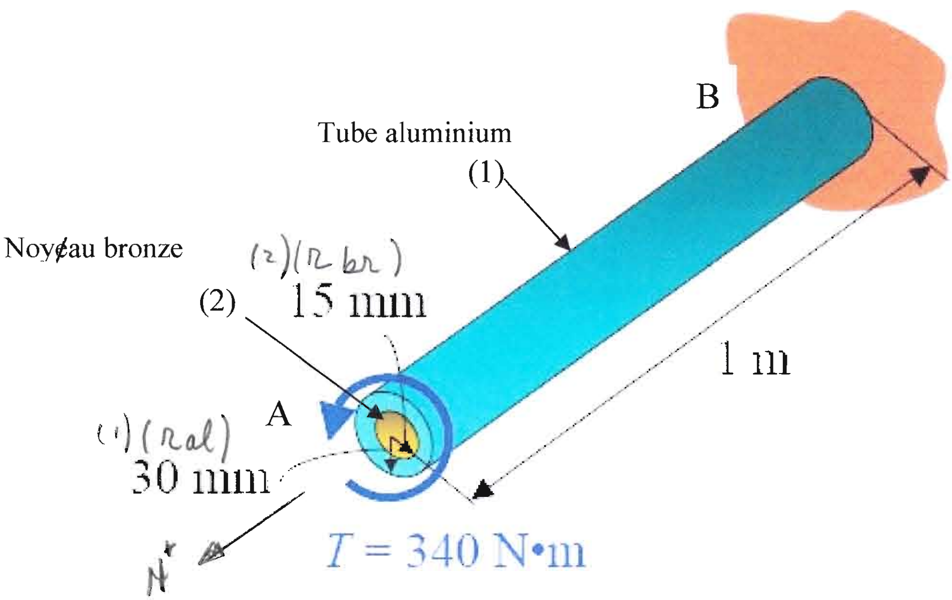
(B) Calculez les torques internes, T_1 et T_2,

(C) Calculez les contraintes de cisaillement maximales et minimales dans l'aluminium et le bronze, τal-max, τal-min, τbr-max, τbr-min.

(D) Calculez la rotation du point A par rapport au point B, $\phi_{A/B}$ (rad). Rapportez la valeur calculée dans la case réponse.

(E) Calculez le torque à appliquer au point A, T_A, pour obtenir une rotation unitaire à A; ($\phi_{A/B}$ =1 rad) pour ce cas il n'y aucun autre torque qui est appliqué sur la structure.

NOTE : (Vous pouvez utiliser la méthode de flexibilité et/ou la méthode de rigidité).



Réponses

(A) T_B = 340 N-m →→

(B) T_1 = 330.4 ;T_2 = 9.63

(C) τal-max = 8.31 MPa

τ al-min = 4.15 MPa

τ br-max = 1.82 MPa

τ br-min = 0 MPa

(D) $\phi_{A/B}$ = 3.461×10^{-3} rad

(E) T_A = 98223.2 N-m

+340 $\quad$ -340 = TB

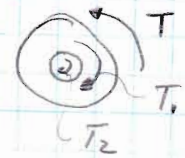
(A) (N-m) $\quad \Sigma T = 0 \quad +340 - T_B = 0 \quad T_B = 340$ →→ ok

(B) • Propriétés des sections : $J_{p1} = \frac{\pi}{2}(r_1^4 - r_2^4) = \frac{\pi}{2}([0.03]^4 - [0.015]^4)$

$J_{p1} = 1.193 \times 10^{-6} m^4$

• $I_{p2} = \frac{\pi}{2} r_2^4 = \frac{\pi}{2} (0{,}015)^4 = 7.952 \times 10^{-8}\ m^4$

• MÉTHODE DE FLEXIBILITÉ



ÉQUILIBRE

$T = T_1 + T_2 = 340\ N\text{-}m$

• Compatibilité : $\phi_1 = \phi_2$

$$\phi_i = \frac{T_i L_i}{I_{pi} G_i}$$

$$\frac{T_1 L_1}{(1.193 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)} = \frac{T_2 L_2}{(7.952 \times 10^{-8})(35 \times 10^9)}$$

$T_1 = 34.29\ T_2$ donc : $T_2 (34.29 + 1) = 340\ N\text{-}m$

$T_2 = 9.63\ N\text{-}m$

$T_1 = 330.4\ N\text{-}m$

• Méthode de rigidité : $(k_1^T + k_2^T) \cdot \phi = 340\ N\text{-}m$; $k_i^T = \frac{I_{pi} \cdot G_i}{L_i}$

$$\left[\frac{(1.193 \times 10^{-6})(80 \times 10^9)}{1} + \frac{(7.952 \times 10^{-8})(35 \times 10^9)}{1} \right] \phi = 340$$

$$(95440 + 2783.2]\ \phi = 340$$

$(98223.2)\ \phi = 340 \qquad \phi = 340 / 98223.2 = 3{,}461 \times 10^{-3}\ rd$

$T_1 = k_1^T \cdot \phi = (95440)(3.461 \times 10^{-3}) = 330{,}4\ N\text{-}m$

$T_2 = k_2^T \cdot \phi = (2783.2)(3.46 \times 10^{-3}) = 9{,}63\ N\text{-}m$

• (c) ⇒ $\tau = \frac{T \cdot r}{I_p}$

$$\tau_{al\,MAX} = \frac{(330.4)(0.03)}{1.193 \times 10^{-6}} \Rightarrow 8.31\ MPa$$

$$\tau_{al\,min} = \frac{(330{,}4)(0{,}015)}{1.193 \times 10^{-6}} = 4.15\ MPa \approx 8.31\ MPa/2$$

$$\tau_{br\,MAX} = \frac{(9{,}63)(0{,}015)}{7.952 \times 10^{-8}} = 1.82\ MPa$$

$$\tau_{br\,min} = 0$$

• Si flexibilité : $\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \phi_1 = \dfrac{330.4(1)}{(1.193\times10^{-6})(80\times10^{9})} = 3.461\times10^{-3}\ \text{rd}$

• $k^T = k_1^T + k_2^T \Rightarrow 95440 + 2783.2 = 98223.2\ \text{N-m/rd}$

QUESTION # 4 (5 points)

qui est encastrée à A et

Considérez la poutre isostatique ci-dessous **qui possède une rotule à « C »:**

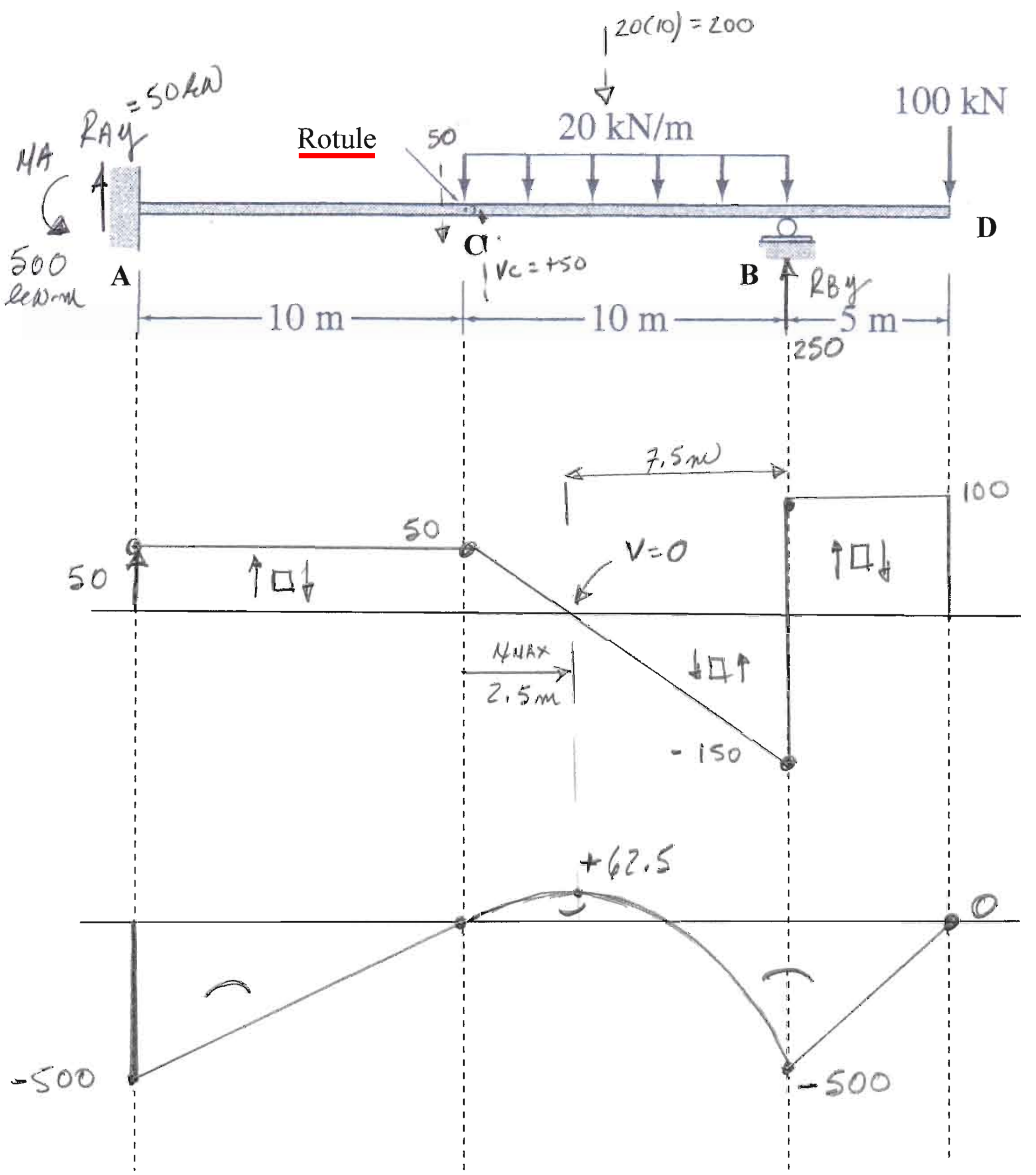
(A) Calculez les réactions R_A, R_B.

(B) Calculez et dessinez le diagramme des efforts tranchants V (kN) en indiquant les valeurs aux points A, C, B, D, ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

(C) Calculez et dessinez le diagramme des moments de flexion M (kN-m) en indiquant les valeurs aux points A, C, B, D ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

Portez une attention particulière à la courbure concave ou convexe des segments de vos diagrammes.

RÉPONSES: R_A= 50 kN; R_B= 250 kN



• Calcul des réactions

DCL C-B-D :

$\Sigma M_C = 0$

• $-100(15) + R_{By}(10) - 200(5) = 0$

$R_{By} = 250\text{kN} \uparrow$

• V_C : $\uparrow + \Sigma F_y = 0$

• $C_y - 200 + 250 - 100 = 0$

• $C_y = +50 \uparrow$

• DCL A-C

$\uparrow + \Sigma F_y = 0$ $R_{Ay} = 50\text{kN} \uparrow$

$M_A = 50 \times 10 = 500$ kN·m

• DIAG. V (kN)

$V_A = 50$ (kN)

$V_C = 50$

$V_B^- = 50 - (20)(10) = -150$

$V_B^+ = -150 + 250 = 100$

$V_D^- = 100 + 0 = 100$

$V_D = 100 - 100 = 0$

- Moments $\quad M_{max} = 50\,kN / 20\,kN/m = 2.5\,m$

- $M_A = -500\ kN\text{-}m$ $\quad$ Aire cumulative de V

- $M_C = -500 + 50(10) = 0$ $\quad$ Ok rotule

- $M_{xMAX} = 0 + \frac{50\,(2.5)}{2} = 62.5\ kN\text{-}m$ $\quad$ (parabole)

- $M_B = +62.5 - \frac{(150 \times 7.5)}{2} = -500\ kN\text{-}m$

- $M_D = -500 + (100 * 5) = 0$ $\quad$ Ok.