QUESTION # 1 **(5 points)**

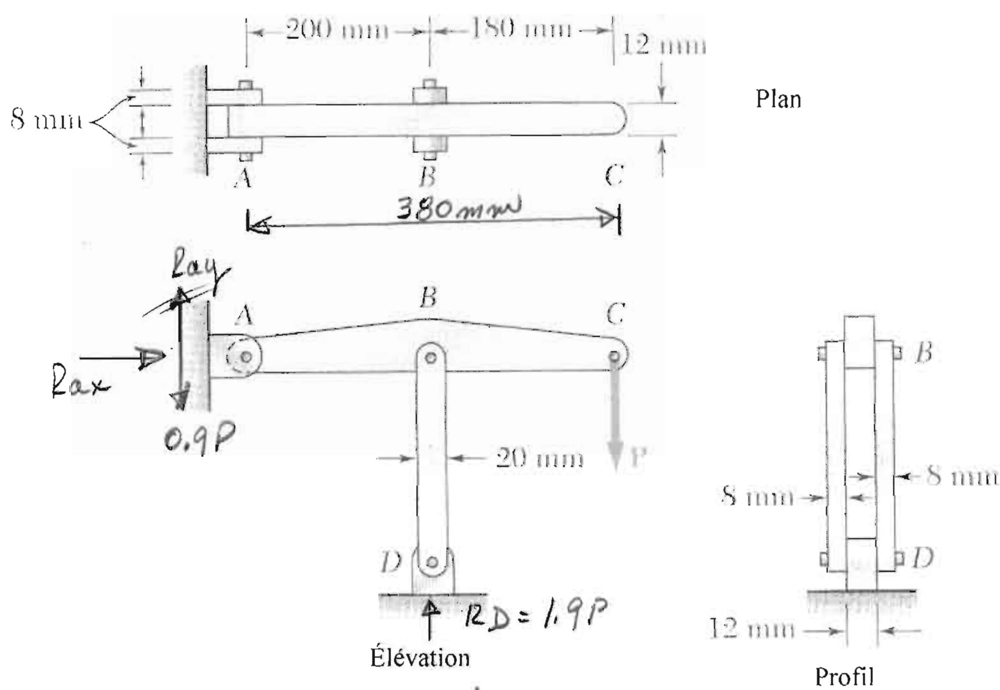
Une structure est soumise une charge P. Le diamètre du boulon à A est de 8 mm et le diamètre des boulons à B et D est de 12 mm.

- La contrainte de cisaillement ultime des boulons est $\tau_{max\text{-}ultm} = 100$ MPa
- La contrainte normale maximale des deux tiges (ABC et DB) est $\sigma_Y = 250$ MPa

(A) Déterminez les réactions R_A et R_D en fonction de P.

(B) Déterminez la charge admissible P si un facteur de sécurité de 3.0 est requis pour cette structure.

(C) Pour la charge P calculée à la question (B) calculez les contraintes de contact dans le boulon à A, σ^A_B et les plaques de supports de 8mm à A, σ^A_P.



RÉPONSES:

R_A = 0.9P ↓

R_D = 1.9P ↑

P = 3.72 (kN)

σ^A_B = 34.91 (MPa)

σ^A_P = 26.18 (MPa)

(A) RÉACTIONS : $\Sigma M_A = 0$ $\quad 0.2 R_D - P(0.38) = 0 \quad 0.2 R_D = P(0.38)$

(N-m) $\quad R_D = P(0.38/0.2) = 1.9P$

• $\Sigma F_x = 0 \quad R_{Ax} = 0$ $\quad$ • $\Sigma F_y = 0 \quad R_{ay} + 1.9P - P = 0 \quad R_{ay} = P(1-1.9) = -0.9P$

(B) Mécanismes de défaillances

• Boulons A : $A_s = \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{\pi}{4}(0.008)^2 = 5.02656\times10^{-5}\ m^2$

• Cisaillement Double : $\frac{\tau}{3} = \frac{R_A}{2A_s} = \frac{100\times10^6}{3} = \frac{0.9P}{2(5.02656\times10^{-5}\ m^2)}$ 1

$$P = \frac{(2)(5.02656\times10^{-5})(100\times10^{6})}{(3)\ (0,9)} = 3723.37\ N$$
$$= \underline{3.72\ kN}$$

- **Boulons à B et D : cisaillement double** dia = 12 mm

$$A_s = \frac{\pi}{4}d^2 = \frac{\pi}{4}(0,012)^2 = 113.10\times10^{-6}\ m^2$$

- cisaillement double $\quad \frac{\tau}{3} = \frac{F_{BD}}{2A_s} = \frac{R_D}{2A_s} = \frac{100\times10^6}{3} = \frac{1.9P}{2(113.10\times10^{-6}\ m^2)}$

$$P = \frac{(2)(113,10\times10^{-6})(100\times10^{6})}{(3)\ (1,9)} = 3968.42\ N$$
$$= \underline{3.97\ kN}$$

- **Contrainte σ_m^{MAX} (B-D) (1 plaque 8mm × 20mm)**

$$\sigma = \frac{R_D}{(2)(A_{1\,plaque})} \Rightarrow \frac{\sigma_Y}{3} = \frac{1,9P}{(2)(.008*0.020)} = \frac{250\times10^6}{3}$$

$$P = \frac{(2)(.008\times0.020)(250\times10^{+6})}{(3)(1,9)} = 14035.08\ N$$
$$= \underline{14.04\ kN}$$

$\therefore$ **La plus petite valeur de P = 3.72 kN**

(c) $P = 3,72\ kN \quad \sigma_B^A = \frac{R_A}{\underline{(dia^B)*t_{pl.}}} = \frac{0,9(3723,37)}{(0.008)(0.012)} \Rightarrow 34.91\ MPa$

Boulon

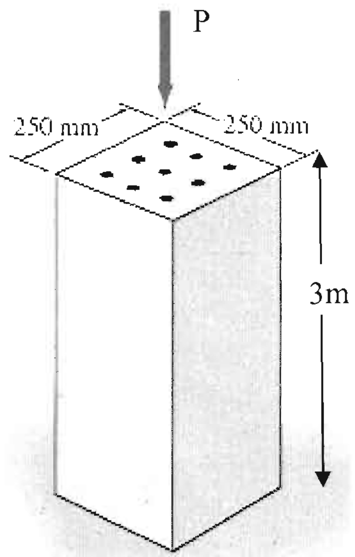
support $\quad \sigma_P^A = \frac{R_A}{\underline{(2)(dia^B)*t_{pl}}} = \frac{0,9(3723.37)}{(2)(0,008)(0,008)} = 26.18\ MPa.$

QUESTION # 2 (5 points)

Un poteau en béton de 3 m de long, d'une section de 250 mm x 250 mm, est armé à l'aide de 9 barres d'acier d'armature. Chaque barre possède un diamètre de 19.05 mm. Le module d'élasticité du béton est de E_b = 20 GPa et le module d'élasticité de l'acier est de E_a = 200 GPa.

(1) Calculez la charge axiale TOTALE, P_1, qui produit une contrainte de compression de 10 MPa dans le béton.

(2) Si le poteau se comprime d'un déplacement de 1mm quelle est la valeur de la charge axiale TOTALE P_2 qui a été appliquée ?



Réponses

(A) P_1 = 855.9 **(kN)**

(B) P_2 = 570.6 **(kN)**

(A) • Méthode de flexibilité :

(A) GÉOMÉTRIE : $A_{ACIER} = 9\left[\frac{\pi}{4}(19.05\,mm)^2\right] = 2565.2\,mm^2$

$A_{BÉTON} = (250\,mm \times 250\,mm) - (2565.2)$
= SECTION Brute − aire Acier
$= 59934.8\,mm^2$

Loi de Hooke
$\sigma = E\varepsilon$

(B) $e_{ACIER} = e_{BÉTON} = \frac{PL}{A_A E_A} = \frac{PL}{A_B E_B} \Rightarrow \frac{e_i}{L} = \varepsilon$;

$\frac{e_{ACIER}}{L} = \frac{e_{BÉTON}}{L} \Rightarrow \varepsilon_A = \varepsilon_B$ Compatibilité des déformations

$\varepsilon_A = \varepsilon_B = \frac{\sigma_{BÉTON}}{E_{BÉTON}} = \frac{10 \times 10^6\,N/m^2}{20 \times 10^9\,N/m^2} = 5 \times 10^{-4}$

3

(c) ÉQUILIBRE $P_1 = P_{ACIER} + P_{BÉTON}$

$P_1 = \sigma_A \cdot A_A + \sigma_B \cdot A_B$

$P_1 = \varepsilon_A E_A A_A + \varepsilon_B E_B A_B = 5\times10^{-4}(200\times10^{9} \times 2565.2\times10^{-6}) \ldots$

$+ \quad 5\times10^{-4}(20\times10^{9} \times 59934.8\times10^{-6})$

$P_1 = 256520\,N + 599348\,N = 855868\,N$

$= 855.9\,kN$

(B) · Compatibilité des déformations $\varepsilon_A = \varepsilon_B = \varepsilon$

- $P_2 = \varepsilon\,(E_A A_A + E_B A_B)$
- $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{1\times10^{-3}\,m}{3\,m} = 3.333\times10^{-4}$
- $P_2 = \left(\dfrac{1\times10^{-3}}{3}\right)\left((200\times10^{9}\times2565.2\times10^{-6}) + (20\times10^{9}\times59934.8\times10^{-6})\right)$
- $P_2 = (171013.33 + 399565.33)\,N = 570578.6\,N$

$P_2 = 570.6\,kN$

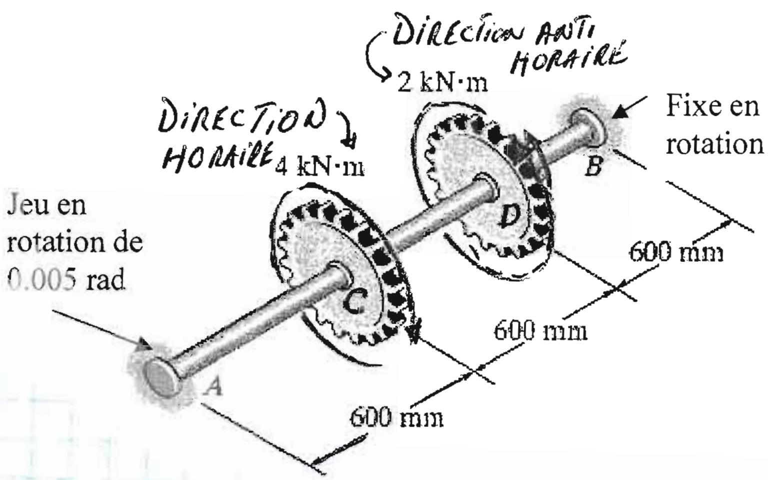
QUESTION # 3 (5points)

Un arbre ACDB possède un diamètre de 80 mm est constitué d'acier (G= 75 GPa). Le joint B est fixe. Le joint A peut subir une rotation de 0.005 rad avant de devenir fixe (il y a donc un jeu en rotation au joint A). Lorsque les torques indiqués sont appliqués aux joints C et D:

(A) Calculez la contrainte de cisaillement maximale dans le segment AC, $\tau^{AC}_{max.}$

(B) Calculez la contrainte de cisaillement maximale dans le segment CD, $\tau^{CD}_{max.}$

(C) Calculez l'angle de rotation entre A et D, $\phi_{A/D}$ en rad.



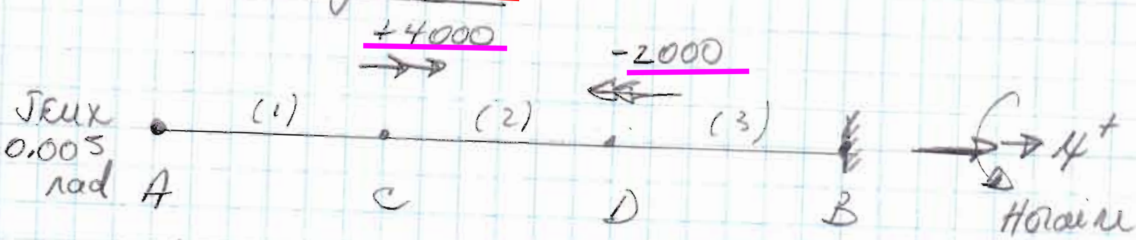
Réponses

(A) τ^{AC}_{max} = 28.18 MPa

(B) τ^{CD}_{max} = 11.60 MPa

(C) $\phi_{A/D}$ = 3.32×10^{-3} rad

1. AXE Signes :



Méthode de flexibilité :

• Équilibre DCL :

DCL C : T_1, 4000, T_2 $\qquad -T_1 + T_2 + 4000 = 0 \qquad T_2 = T_1 - 4000$

DCL D : T_2, -2000, T_3 $\qquad -T_2 - 2000 + T_3 = 0 \qquad T_2 = T_3 - 2000$

$T_3 = T_2 + 2000 = \qquad T_3 = (T_1 - 4000 + 2000)$

$T_3 = (T_1 - 2000)$

• GEOMETRIE : $I_{p_1} = I_{p_2} = I_{p_3}$ dia = 80 mm $r = 40$ mm

$$\frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi}{2}(0.04)^4 = 4.021248 \times 10^{-6}\ m^4$$

• Compatibilité : $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = 0.005$

$$\frac{T_1 L_1}{G_1 I_{p_1}} + \frac{T_2 L_2}{G_2 I_{p_2}} + \frac{T_3 L_3}{G_3 I_{p_3}} = 0.005 \qquad L_1 = L_2 = L_3 = 0.6\,m$$

$$G_1 = G_2 = G_3 = 75 \times 10^9\ N/m^2$$

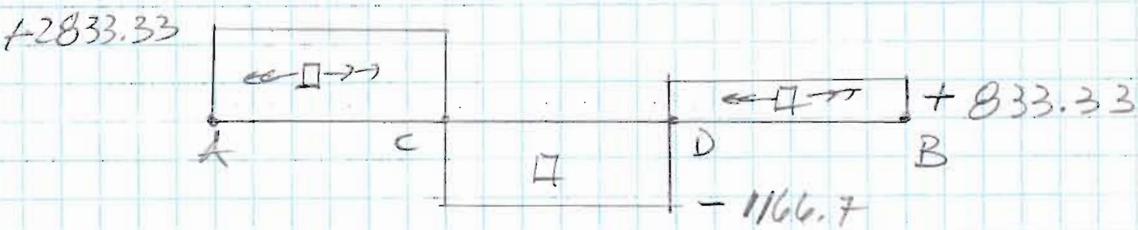
$$\frac{L_i}{G_i I_{p_i}} = \frac{(0.6)}{(75\times 10^9)(4.021248\times 10^{-6})} = 2\times 10^{-6}$$

$$T_1(2\times 10^{-6}) + T_2(2\times 10^{-6}) + T_3(2\times 10^{-6}) = 0.005$$

$$T_1 + (T_1 - 4000) + (T_1 - 2000) = \frac{0.005}{2\times 10^{-6}} = 2500$$

$$3T_1 = 2500 + 6000$$

$$T_1 = 8500/3 = +2833.33 \qquad T_2 = -1166.7 \qquad T_3 = +833.33$$



$$\tau^{AC} = \frac{(2833.33)(0.04)}{4.0212\times 10^{-6}} \Rightarrow 28.18\ MPa$$

$$\tau^{CD} = \frac{(-1166.7)(0.04)}{4.0212\times 10^{-6}} \Rightarrow 11.60\ MPa$$

$$\phi_i = \left(\frac{L_i}{I_{p_i} G_i}\right) T_i \Rightarrow \phi_{A/D} = \phi_{A/C} + \phi_{C/D}$$

$$\Rightarrow \frac{(+2833.33)(0.6)}{(4.02148\times 10^{-6})(75\times 10^9)} - \frac{(1166.7)(0.6)}{(4.02148\times 10^{-6})(75\times 10^9)}$$

$$= +3.32\times 10^{-3} = 5.635\times 10^{-3} - 2.32\times 10^{-4}$$

QUESTION # 4 (5 points)

Considérez la poutre isostatique AB ci-dessous qui mesure 9m de longueur avec (1) une charge distribuée w_1 = 100 N/m, (2) une charge concentrée P_1 = 600 N et (3) un moment concentré M_1 1000 N-m appliqué à x = 7m. appliquée à x = 5m

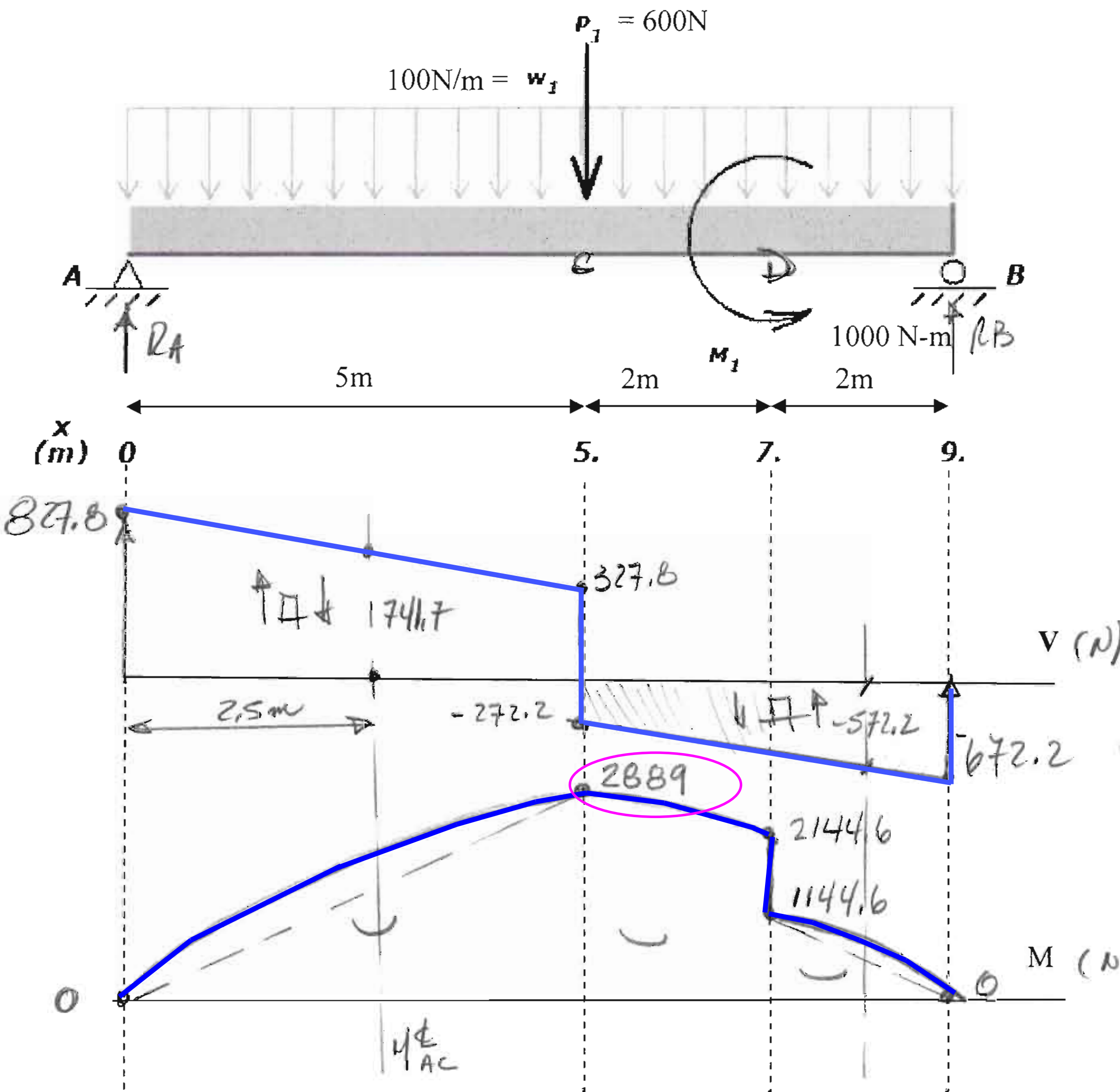
(A) Calculez les réactions R_A, R_B.

(B) Calculez et dessinez le diagramme des efforts tranchants V (kN) en indiquant les valeurs aux points x = 0m, 5m, 7m et 9m ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

(C) Calculez et dessinez le diagramme des moments de flexion M (kN-m) en indiquant les valeurs aux points x = 0m, 5m, 7m et 9m ainsi que les valeurs maximales et minimales et leurs positions.

Portez une attention particulière à la courbure concave ou convexe des segments de vos diagrammes.

RÉPONSES: R_A= 827.78 N; R_B= 672.22 N



$V(7m) = \frac{(272.2+672.2)}{2}$
$= -472.2N$

7

(A) Calcul des réactions : (N-m)

• $\circlearrowleft^{+} \sum M_A = 0 \quad R_B(9) + 1000 - 600(5) - (100)(9)(9/2) = 0$

$R_B = (-1000 + 3000 + 4050)/9 = 672.22\,N \uparrow$

• $\uparrow^{+} \sum F_y = 0 \quad R_A - (100)(9) - 600 + 672.22 = 0$

$R_A = +900 + 600 - 672.22 = 827.78\,N \uparrow$

(B) diagramme V (N) : $V_A = R_A = 827.78 = 827.8 \uparrow N$

$V_C^- = 827.8 - (100\,N/m)(5\,m) = 327.8\,N$

$V_C^+ = 327.8 - 600 = -272.2\,N$

$V_B = -272.2 - (100\,N/m)(4\,m) = -672.2\,N$ ok $\approx R_B$

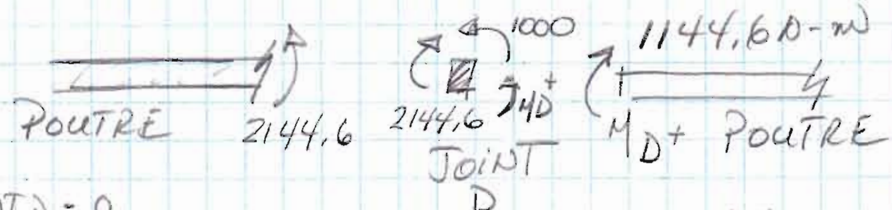
(C) diagramme M (N-m) : $dM = \int V(x)\,dx \quad \sum$ aire diag $V(x)$.

• $M_A = 0$

• $M_C = 0 + \frac{(827.8 + 327.8)}{2}(5) = 2889\,N\text{-}m = M_{MAX}$.

• $M_D^- = 2889\,N\text{-}m - \frac{(272.2 + 472.2)}{2}(2) = 2144.6\,N\text{-}m$

• M_D^+



$\circlearrowleft^{+} \sum M_{JOINT\,D} = 0 \qquad 1000 - 2144.6 + M_D^+ = 0 \qquad M_D^+ = 2144.6 - 1000$

$M_D^+ = 1144.6\,N\text{-}m$

• $M_B = 0$ Vérification : $1144.6 - (472.2 + 672.2)(1/2)(2) = 0.2 \approx 0$ ok

• Courbure $\cup$: Concave vs convexe

$M_{\not{C}\,AC} = \frac{(827.8 + 741.7)}{2}(2.5) = 1961.8 > 2889/2 = 1444.5 \therefore$

$M_{\not{C}\,DB} = \frac{(572.2 + 672.2)}{2}(1) = 622.2 > \frac{1444.6}{2} = 72.3\,N\text{-}m$