



*Département
de mathématiques
et de génie industriel*

Nom : _____

Prénom : _____

Groupe : _____

Matricule : _____

Nom : _____

Prénom : _____

Groupe : _____

Matricule : _____

MTH1101 CALCUL I

Devoir # 1 Automne 2009

Réservé

1.	/5
2.	/3
3.	/2
4.	/3
5.	/3
6.	/4
7.	/4
Clarté	/1

TOTAL:

SUR /25

DIRECTIVES

- Vous devez remettre un rapport par équipe de deux étudiant(e)s (au maximum), au plus tard le vendredi 2 octobre avant 11h, dans le casier de votre groupe pour le cours MTH1101, près du local A-520.2. Dans le cas d'une équipe composée d'étudiant(e)s provenant de deux groupes, déposez le rapport dans le casier d'un des groupes et indiquez **très clairement** le groupe de chaque étudiant(e). Chaque membre d'une équipe recevra la même note.
- Utilisez **obligatoirement** la page de présentation ci-jointe pour la remise de votre rapport et inscrivez tous les renseignements demandés.
- Lors de la correction, il sera tenu compte de la qualité et de l'initiative manifestées dans le travail et de sa présentation (**1 point**).
- Tout plagiat sera sévèrement sanctionné.

QUESTION # 1 (5 points)

On considère la fonction

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x > -1$$

- a) Donner $T(x)$ la série de Taylor de $f(x)$ autour de $a = 0$. Spécifier $f^{(n)}(0)$.
- b) Pour la série $T(x)$ obtenue en a), donner l'intervalle et le rayon de convergence. La série converge-t-elle aux extrémités de cet intervalle ? Justifier.
- c) Considérons que $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_n(x) - f(x)|$ où $P_n(x)$ est le polynôme de Taylor de degré n de $f(x)$ autour de $a = 0$. Qu'en concluez-vous?
- d) Vous voulez approximer la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ en utilisant son polynôme de Taylor de degré n autour de $a = 0$. Quel degré minimal n devez-vous utiliser pour garantir que l'erreur soit strictement inférieure à 0,02 en chaque point de cet intervalle?
- e) En vous basant sur le résultat obtenu en a), trouver la série de Taylor, notée $S(x)$, de la fonction

$$g(x) = \ln(1+4x^2)$$

autour de $a = 0$.

QUESTION # 2 (3 points)

Soit l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(x),$$

où C_n est un coefficient fonction de n .

Trouver les valeurs de C_n pour lesquelles cette équation est satisfaite.

QUESTION # 3 (2 points)

Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Trouver la somme lorsqu'il y a convergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^3}$

QUESTION # 4 (3 points)

Trouver la valeur positive de x telle que

$$5 \sum_{n=-1}^{\infty} (3-x)^{-n} = 36.$$

QUESTION # 5 (3 points)

Déterminer l'intervalle et le rayon de convergence de la série

$$\sum_{K=1}^{\infty} \frac{100^K (x-1)^{2K}}{K}$$

QUESTION # 6 (4 points)

Estimer la valeur de

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x^2}}{x^2} dx,$$

tout en garantissant que l'erreur d'approximation soit inférieure à 5×10^{-2}

QUESTION # 7 (4 points)

- a) Soit Z_1 et Z_2 deux nombres complexes. Montrer que

$$\operatorname{Re}(Z_1)\operatorname{Re}(Z_2) = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(Z_1 Z_2) + \frac{1}{2}\operatorname{Re}(Z_1 \overline{Z_2})$$

- b) Quelle courbe (cercle, parabole, hyperbole) représente l'expression suivante :

$$\operatorname{Re}(1 - Z) = |Z|$$

- c) Trouver toutes les racines de $Z^3 = 1 + i$.
- d) Exprimer $-\sqrt{6} - \sqrt{2}i$ sous forme polaire.