

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES ET DE GÉNIE INDUSTRIEL
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

MTH2210B-CALCUL SCIENTIFIQUE POUR INGÉNIEURS
CONTRÔLE PÉRIODIQUE

le 23 octobre 2009

Directives: Vous avez deux heures pour compléter ce contrôle. Vous n'avez droit à aucune documentation. Seules les calculatrices portant l'autocollant de l'AEP peuvent être utilisées. Utilisez l'aide-mémoire et le cahier qui sont distribués avec le questionnaire. **Une réponse sans justification se verra attribuer la note 0.**

1. Questions rapides:

- ($\frac{2}{30}$) (a) Soit $x^* = 0,25 \times 10^{-2}$ une approximation de x à **3 chiffres significatifs**. Trouver une borne inférieure et une borne supérieure, aussi précises que possible, pour la valeur de x .

- ($\frac{2}{30}$) (b) Expliquer brièvement pourquoi la suite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = e \simeq 2,718\,281$$

tend plutôt vers 1 pour de grandes valeurs de n , en arithmétique flottante. Estimer la plus petite valeur de n à partir de laquelle cette suite tend vers 1, suivant la norme IEEE en simple précision.

- ($\frac{3}{30}$) (c) Soit une calculatrice travaillant en arithmétique flottante à 3 chiffres dans la mantisse et utilisant l'arrondi. Faire les différentes étapes suivies par cette calculatrice pour évaluer l'expression suivante:

$$A \times (B + C) \quad \text{avec} \quad A = 2136, B = 9993 \text{ et } C = 0,004567.$$

2. Soit la fonction

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

On désire obtenir le développement de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

- ($\frac{3}{30}$) (a) Obtenir le développement de Taylor de degré $2n + 1$ de la fonction $f(x)$ autour de $x_0 = 0$.
- ($\frac{2}{30}$) (b) Donner une borne supérieure de la valeur absolue de l'expression analytique du terme d'erreur du développement de Taylor de degré $2n + 1$ de la fonction $f(x)$ pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.
- ($\frac{2}{30}$) (c) Déterminer le degré minimal $m = 2n + 1$ du polynôme de Taylor de la fonction $f(x)$ dont l'erreur ne dépassera pas 10^{-4} pour tout x tel que $|x| \leq \frac{\pi}{4}$.

3. On désire faire passer une *spline cubique naturelle* par les points suivants:

i	x_i	$f(x_i)$
0	0,0	1,000 000
1	0,5	1,127 626
2	1,0	1,543 081
3	1,5	2,352 409
4	2,0	3,762 196

En résolvant le système linéaire requis, on a trouvé:

i	0	1	2	3	4
f''_i	0,000	1,432	1,178	3,308	0,000

- ($\frac{3}{30}$) (a) Obtenir une approximation de $f(0,75)$ à l'aide de cette spline.
- ($\frac{2}{30}$) (b) Toujours en se servant de cette spline, on veut obtenir une approximation de $f'(1,0)$. On peut donc choisir entre le polynôme $p_2(x)$ défini dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$ et le polynôme $p_3(x)$ défini dans l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$. Lequel de ces 2 polynômes donnera la meilleure approximation de $f'(1,0)$? Expliquer pourquoi. **Ne pas calculer cette approximation.**
- ($\frac{2}{30}$) (c) Donner les expressions des polynômes de Lagrange $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$, et $L_3(x)$ de degré 3 qui permettent de calculer une approximation de $f(0,75)$. Cette approximation doit être la plus précise possible. **(Ne pas calculer cette approximation).**
- ($\frac{3}{30}$) 4. En vous servant des développements de Taylor appropriés, donner l'ordre de précision de l'approximation de la dérivée:

$$f'''(x) \simeq \frac{f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x)}{h^3}.$$

5. Le tableau suivant présente la vitesse d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique.

t (s)	0	10	20	30	35	40
$v(t)$ (m/s)	2,00	1,89	1,72	1,44	1,21	1,01

- ($\frac{2}{30}$) (a) Calculer une approximation d'ordre 2 de l'accélération $a(t)$ (en m/s^2) en $t = 15s$ qui soit la plus précise possible.
- (b) La vitesse moyenne de l'eau en écoulement dans la conduite cylindrique peut être calculée par la relation suivante :

$$v_{\text{moy}} = \frac{1}{40} \int_0^{40} v(t) dt.$$

- ($\frac{2}{30}$) i. Calculer une approximation d'ordre 2 de la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau.
- ($\frac{2}{30}$) ii. Comment pourrait-on calculer la vitesse moyenne d'écoulement de l'eau avec un *maximum* de précision (au moins d'ordre 4)? **Ne pas calculer cette approximation.**