ÉCOLE
POLYTECHNIQUE
MONTRÉAL

DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE

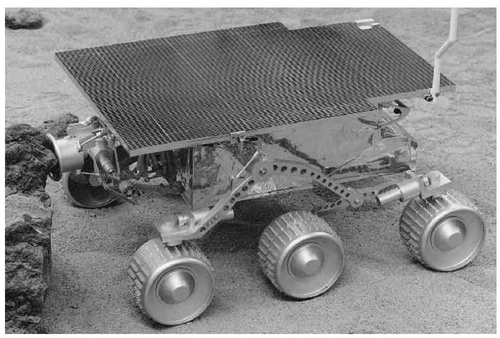
Cours ELE3201 – Asservissements

Date : 11 octobre 2002
Heure : 15h15 à 17h05

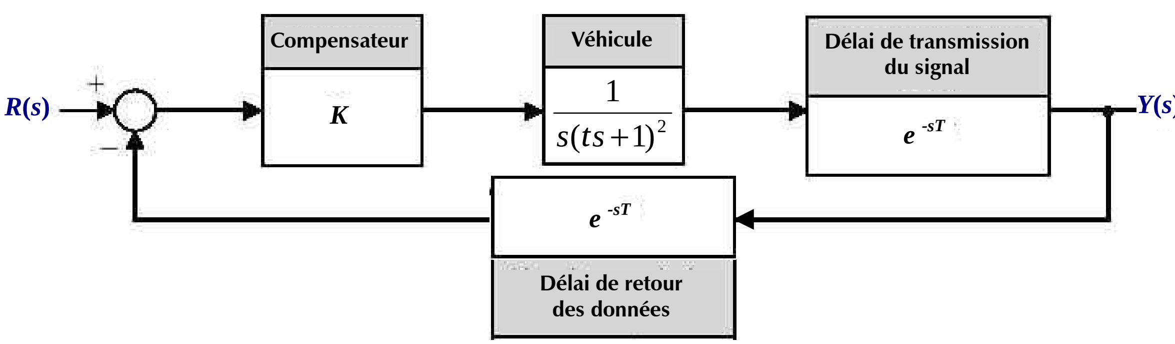
Documentation : 2 feuilles 8½x11
Calculatrice non programmable permise

Question no.1 : (4 points)

En vue d explorer un site d impact de météorite sur la Lune, on décide d envoyer un véhicule mobile qui sera téléopéré à partir de la Terre.



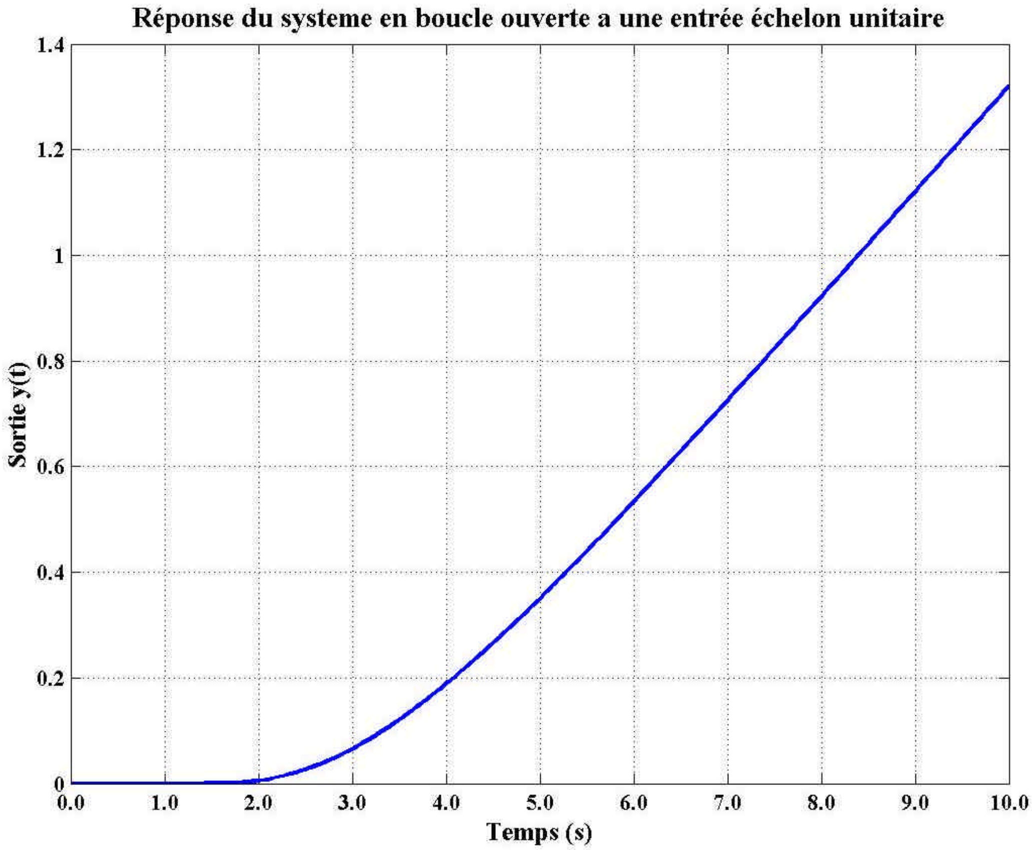
Le diagramme fonctionnel représentant le véhicule et le système de commande est le suivant :



Les opérateurs de la mission devront composer avec un délai de transmission du signal de commande et d un délai de retour des données T, causé par la distance Terre-Lune.

Des essais préliminaires en boucle ouverte ont permis d obtenir les données suivantes, qui correspondent à la réponse $Y(s)$ du système à une entrée échelon unitaire $R(s)$.

Question no.1 : (suite)



a) Évaluer le gain K, la constante de temps t, et le délai de transmission T. Présentez votre développement et vos calculs détaillés.

$$Y(s) = \left[\frac{K}{s^2(st+1)^2}\right]\cdot e^{-sT}$$

$$Y(s) = \left[\frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{1,2}}{s^2} + \frac{B_{1,1}}{st+1} + \frac{B_{1,2}}{(st+1)^2}\right]\cdot e^{-sT}$$

$$A_{1,1} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[s^2\frac{K}{s^2(st+1)^2}\right]\Bigg|_{s=0} = \frac{d}{ds}\left[\frac{K}{(st+1)^2}\right]\Bigg|_{s=0} = -\frac{2Kt(st+1)}{(st+1)^4}\Bigg|_{s=0} = -2Kt$$

$$A_{1,2} = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{ds^0}\left[s^2\frac{K}{s^2(st+1)^2}\right]\Bigg|_{s=0} = \frac{K}{(st+1)^2}\Bigg|_{s=0} = K$$

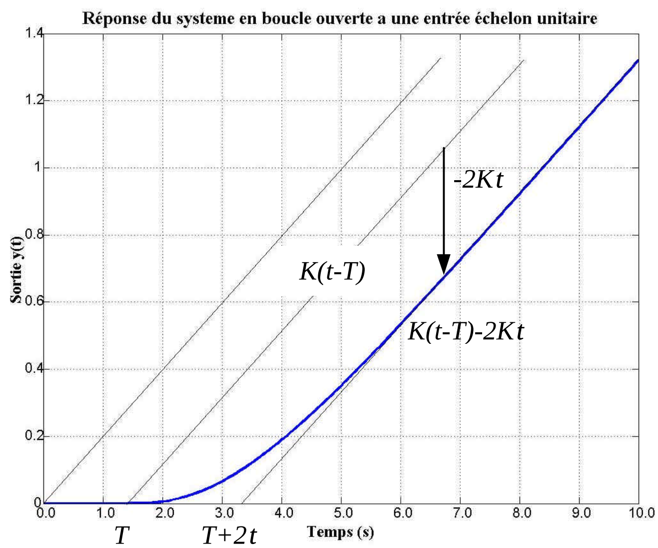
$$B_{1,1} = \frac{1}{1!}\frac{d}{ds}\left[(st+1)^2\frac{K}{s^2(st+1)^2}\right]\Bigg|_{s=-1/t} = \frac{d}{ds}\left[\frac{K}{s^2}\right]\Bigg|_{s=-1/t} = -\frac{2Ks}{s^4}\bigg|_{s=-1/t} = 2Kt^3$$

$$B_{1,2} = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{ds^0}\left[(st+1)^2\frac{K}{s^2(st+1)^2}\right]\Bigg|_{s=-1/t} = \frac{K}{s^2}\bigg|_{s=-1/t} = Kt^2$$

$$Y(s) = \left[\frac{A_{1,1}}{s} + \frac{A_{1,2}}{s^2} + \frac{B_{1,1}}{st+1} + \frac{B_{1,2}}{(st+1)^2}\right]\cdot e^{-sT} = \left[-\frac{2Kt}{s} + \frac{K}{s^2} + \frac{2Kt^3}{st+1} + \frac{Kt^2}{(st+1)^2}\right]\cdot e^{-sT}$$

$$y(t) = \left[-2Kt + K(t-T) + 2Kt^2 e^{-(t-T)/t} + Kt(t-T)e^{-(t-T)/t}\right]\cdot u_{-1}(t-T)$$

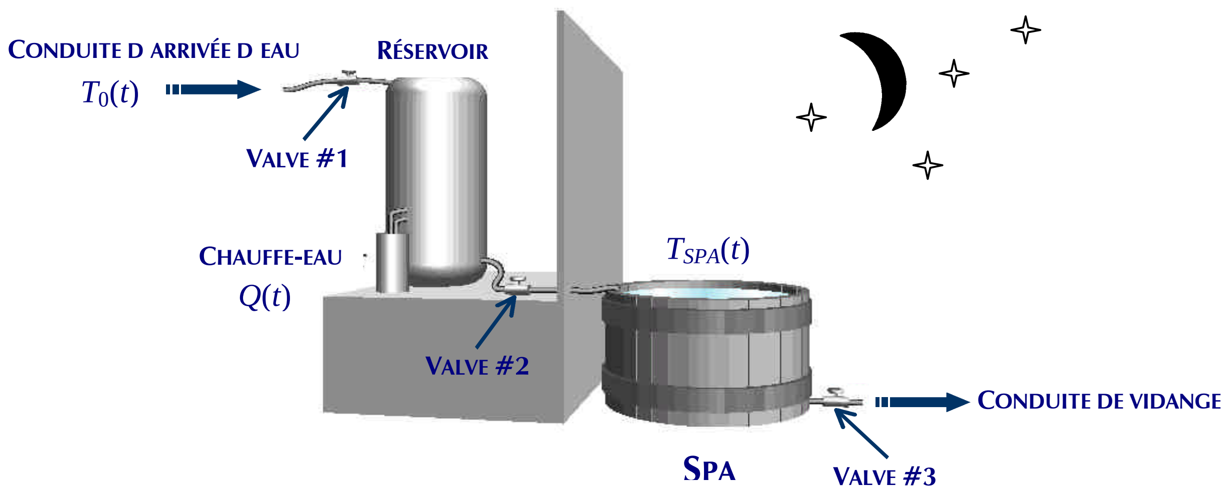
$$y(\infty) = [-2Kt + K(t-T)]\cdot u_{-1}(t-T)$$



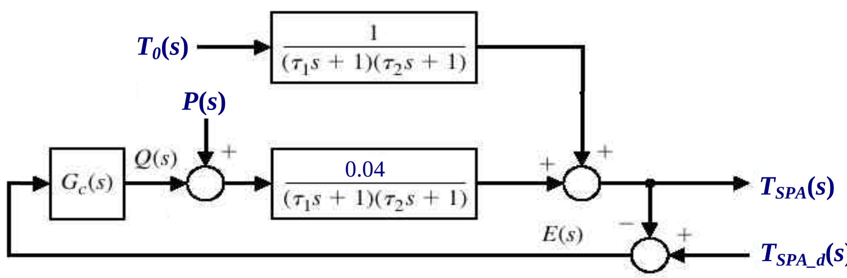
Donc K = 0.2, T = 1.4 s , et t = (3.4-1.4)/2 s = 1.0 s

Question no.2 : (8 points)

La température de l eau d un spa d eau de mer extérieur peut être ajustée à l aide d un chauffe-eau, tel qu illustré sur la figure ci-dessous. Bien sûr, on souhaite asservir ce système afin que l eau du spa soit à la température idéale désirée.



L eau de mer arrive dans le réservoir à une température constante T_0 de 0°C. Un apport de chaleur Q, limité à 3000 Watts, est fourni par le chauffe-eau. T_{SPA_d} et T_{SPA} représentent respectivement la température désirée et la température mesurée de l eau du spa en degrés Celsius. Le diagramme fonctionnel du système est le suivant :



où les constantes de temps t_1 et t_2 sont respectivement égales à 3.0 et 15.0 secondes. La fonction de transfert $G_c(s)$ représente un compensateur quelconque.

Le problème consiste à concevoir un compensateur PI avec anticipation (K_4) qui permettra de réaliser les performances suivantes :

- un dépassement maximal M_p inférieur à 10% ;
- un temps de réponse à 10% le plus rapide possible ;

a) Écrivez la loi de commande pour un compensateur PI+K_4.

$$U(s) = K_1 E(s) + K_3 \frac{E(s)}{s} + K_4 T_{SPA}(s)$$

$$u(t) = K_1 (T_{SPA}(t) - T_{SPA\_d}(t)) + K_3 \int_0^t (T_{SPA}(t) - T_{SPA\_d}(t))\, dt + K_4 T_{SPA}(t)$$

b) Dessinez le diagramme fonctionnel du système asservi en incluant le compensateur PI+K_4. Il s agit de remplacer le bloc $G_c(s)$ par le compensateur PI+K_4.

Voir notes de cours

c) Écrivez les fonctions de transfert suivantes en donnez les détails de votre développement. Considérez que la température de l eau de mer T_0 est de 0°C.

$$\frac{T_{SPA}(s)}{T_{SPA\_d}(s)} \quad ; \quad \frac{T_{SPA}(s)}{P(s)}$$

$$G_1(s) = \frac{T_{SPA}(s)}{T_{SPA\_d}(s)} = \frac{(0.04K_1 + 0.04K_4)s + 0.04K_3}{45s^3 + 18s^2 + (0.04K_1 + 1)s + 0.04K_3}$$

$$G_2(s) = \frac{T_{SPA}(s)}{P(s)} = \frac{0.04s}{45s^3 + 18s^2 + (0.04K_1 + 1)s + 0.04K_3}$$

Les points suivants appartiennent au lieu des racines du système. Ils ont été calculés en utilisant un ratio $K_3/K_1 = 0.075$:

K_1	p_1	p_2	p_3
0	0	-0.066667	-0.33333
8.2	-0.029327	-0.06	-0.31067
10.643	-0.047389	-0.049378	-0.30323
10.665	-0.048417 - 0.00099423 *j*	-0.048417 + 0.00099423 *j*	-0.30317
12.457	-0.051275 - 0.012764 *j*	-0.051275 + 0.012764 *j*	-0.29745
14.25	-0.054255 - 0.017761 *j*	-0.054255 + 0.017761 *j*	-0.29149
19.506	-0.06389 - 0.026367 *j*	-0.06389 + 0.026367 *j*	-0.27222
24.763	-0.07552 - 0.030461 *j*	-0.07552 + 0.030461 *j*	-0.24896
29.427	-0.089159 - 0.030004 *j*	-0.089159 + 0.030004 *j*	-0.22168
30.593	-0.093567 - 0.028747 *j*	-0.093567 + 0.028747 *j*	-0.21287
32.925	-0.10545 - 0.022089 *j*	-0.10545 + 0.022089 *j*	-0.1891
33.216	-0.10754 - 0.020248 *j*	-0.10754 + 0.020248 *j*	-0.18492
33.799	-0.11282 - 0.013947 *j*	-0.11282 + 0.013947 *j*	-0.17436
34.018	-0.11556 - .0086568 *j*	-0.11556 + 0.0086568 *j*	-0.16889
34.09	-0.11666 - 0.0050575 *j*	-0.11666 + 0.0050575 *j*	-0.16668
34.108	-0.11694 - 0.0036077 *j*	-0.11694 + 0.0036077 *j*	-0.16612
34.159	-0.11259	-0.12309	-0.16432
34.347	-0.10687	-0.13915	-0.15398
34.381	-0.10626	-0.14687 - 1.0425e-008 *j*	-0.14687 +1.0425e-008 *j*
34.416	-0.1057	-0.14715 - 0.0072991 *j*	-0.14715 + 0.0072991 *j*
43.033	-0.085317	-0.15734 - 0.094179 *j*	-0.15734 + 0.094179 *j*
74.782	-0.078592	-0.1607 - 0.19393 *j*	-0.1607 + 0.19393 *j*
75.456	-0.078544	-0.16073 - 0.19548 *j*	-0.16073 + 0.19548 *j*
81.69	-0.078155	-0.16092 - 0.20925 *j*	-0.16092 + 0.20925 *j*
83.396	-0.078064	-0.16097 - 0.21286 *j*	-0.16097 + 0.21286 *j*
87.924	-0.077844	-0.16108 - 0.22215 *j*	-0.16108 + 0.22215 *j*
94.158	-0.07759	-0.16121 - 0.23434 *j*	-0.16121 + 0.23434 *j*
100.39	-0.077377	-0.16131 - 0.24592 *j*	-0.16131 + 0.24592 *j*
106.63	-0.077197	-0.1614 - 0.25697 *j*	-0.1614 + 0.25697 *j*

112.86	-0.077042	-0.16148 - 0.26755 j	-0.16148 + 0.26755 j
119.09	-0.076908	-0.16155 - 0.27774 j	-0.16155 + 0.27774 j
125.33	-0.07679	-0.1616 - 0.28756 j	-0.1616 + 0.28756 j
129.95	-0.076712	-0.16164 - 0.29463 j	-0.16164 + 0.29463 j
225.83	-0.075899	-0.16205 - 0.41485 j	-0.16205 + 0.41485 j
392.45	-0.075492	-0.16225 - 0.5659 j	-0.16225 + 0.5659 j
681.99	-0.075276	-0.16236 - 0.76002 j	-0.16236 + 0.76002 j
1185.2	-0.075156	-0.16242 - 1.0124 j	-0.16242 + 1.0124 j
4.7308 x 10^5	-0.075	-0.1625 - 20.506 j	-0.1625 + 20.506 j
∞	-0.075	∞	∞

d) Esquissez le lieu des racines pour ce système à partir du tableau ci-dessus. Justifiez votre tracé en effectuant tous les calculs nécessaires (asymptotes, points de séparation et d arrivée sur l axe réel, intersection avec l axe imaginaire s il y a lieu). Vous pouvez utiliser et joindre la page 5 du questionnaire à votre cahier d examen.

$$G(s) = \frac{0.04K_1(s+0.075)}{45s^3+18s^2+s}$$

Asymptotes (2) :

$$s_a = \frac{-1/3-1/15+0.075}{2} = -0.1625$$

$$\Phi_a = \pm\frac{h180}{2} = \pm 90$$

Points de départ et d arrivée à l axe réel :

$$\left.\frac{d}{ds}G(s)\right|_{s=\bar{a}} = \frac{d}{ds}\left[\frac{0.04K_1(s+0.075)}{45s^3+18s^2+s}\right]_{s=\bar{a}}$$

$$= \left.\frac{0.04K_1(45s^3+18s^2+s)-0.04K_1(s+0.075)(135s^2+36s+1)}{(45s^3+18s^2+s)^2}\right|_{s=\bar{a}}$$

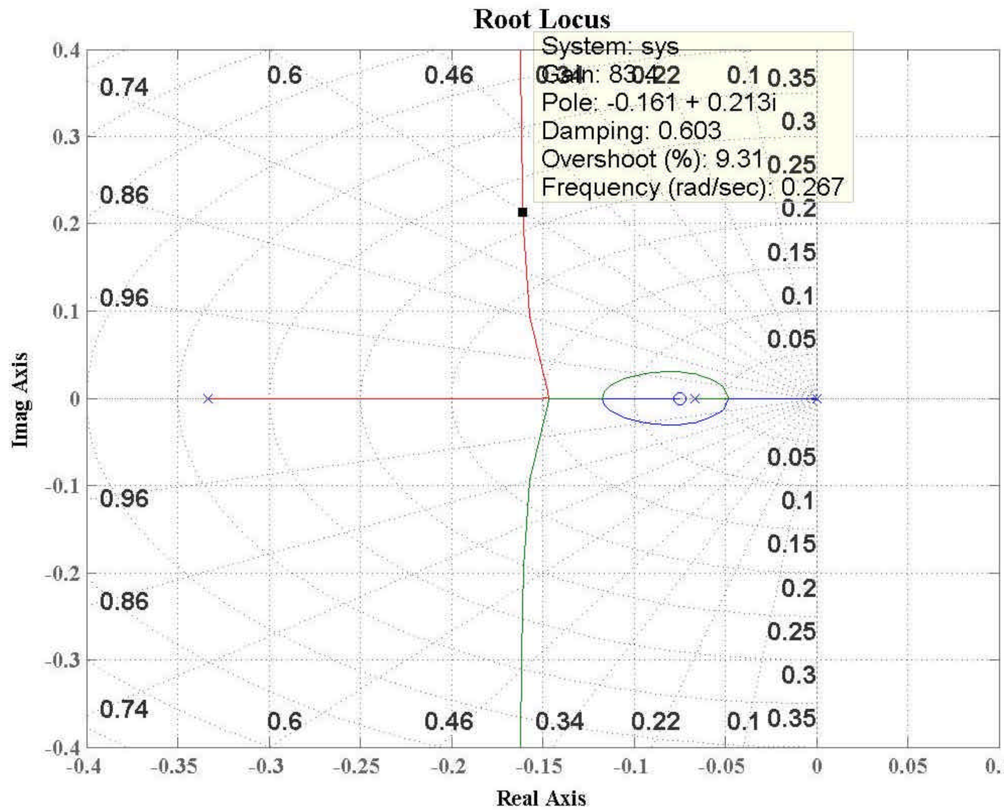
$$\frac{0.04K_1(45s^3+18s^2+s)-0.04K_1(s+0.075)(135s^2+36s+1)}{(45s^3+18s^2+s)^2} = 0$$

$$(45s^3+18s^2+s)-(s+0.075)(135s^2+36s+1) = 0$$

$$45s^3+18s^2+s-135s^3-36s^2-s-10.125s^2-2.7s-0.075 = 0$$

$$-90s^3-28.125s^2-2.7s-0.075 = 0$$

s_1 = -0.14687; s_2 = -0.11723 ; s_3 = -0.048401 (ces points peuvent être directement tirés du tableau, donc pas besoin de calculer les racines)



e) À l aide des graphiques fournis en annexe, et du lieu des racines, identifiez les pôles qui permettront de rencontrer les performances fixées.

$$p_{1,2} = -0.16097 \pm 0.21286$$
$$p_3 = -0.078964$$
$$K_1 = 83.396$$

f) Calculez les gains du compensateur.

$$K_1 = 83.396; K_3 = 0.075K_1 = 6.2547$$
$$(0.04K_1 + 0.04K_4)s + 0.04K_3 \Rightarrow s + 0.078064$$
$$K_4 = \text{-}3.2733$$

g) Quel est le type *i* de ce système ? **1**

h) Évaluez la précision du système :

- en mode suiveur, si on désire augmenter la température de l eau du spa de 0°C à 35°C (consigne de type échelon);
- en mode régulateur, si la défaillance soudaine d un élément chauffant provoque une diminution instantanée de 100 W de l apport de chaleur (perturbation de type échelon).

Erreur en mode suiveur :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{T_{SPA\_d}(s)}{s}\left[1 - G_1(s)\right] = \lim_{s\to 0} T_{SPA\_d}(s)\left[1 - \frac{(0.04K_1 + 0.04K_4)s + 0.04K_3}{45s^3 + 18s^2 + 0.04K_1 s + 0.04K_3}\right] = 0$$

Erreur en mode régulateur :

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{P(s)}{s} G_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{0.04P(s)s}{45s^3 + 18s^2 + 0.04K_1 s + 0.04K_3} = 0$$

i) Combien de temps devrez-vous attendre avant que la température du spa passe de 0°C à 35°C et se maintienne à 35°C ±10%, à la suite de l imposition d une consigne de type échelon ?

$$p_{1,2} = -0.16097 \pm 0.21286$$
$$z = 0.6$$
$$w_n = 0.27$$
$$T_{s10\%} w_n = 2.5$$
$$T_{s10\%} = 9.38s \text{ ouf ! ça chauffe !}$$

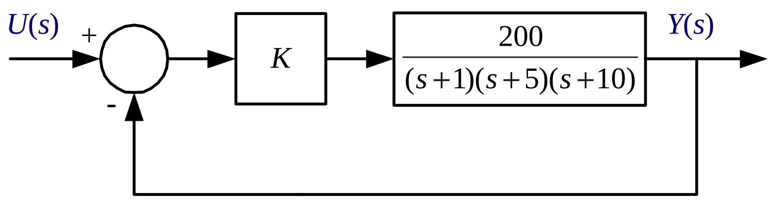
j) Comment peut-on améliorer le temps de réponse du système ? Choisissez la meilleure réponse et justifiez votre choix.

a) En augmentant le gain proportionnel du compensateur actuel (PI+K_4);
b) En utilisant un compensateur PD;
c) En utilisant un compensateur PID+ K_4;

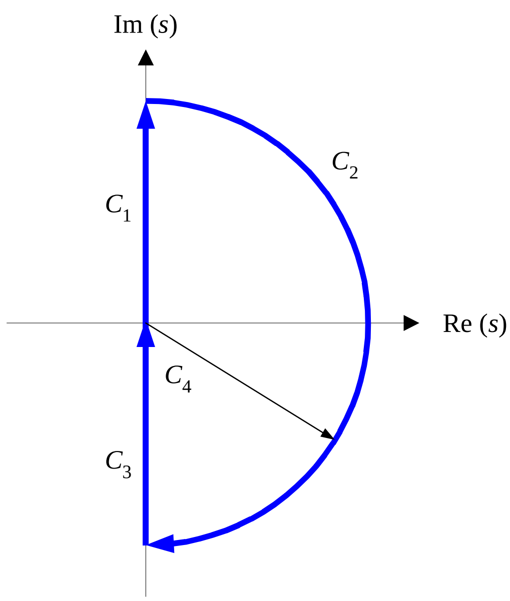
c) L augmentation du gain proportionnel augmentera le dépassement. Le compensateur PD ne permettra pas d annuler l erreur en régime permanent en mode régulateur. Le compensateur PID permettra d améliorer le régime transitoire, et donc le temps de réponse, tout en respectant le dépassement et en maintenant l erreur en régime permanent nulle en mode régulateur.

Question no. 3 : (8 points)

Soit le système avec retour unitaire représenté par le schéma suivant :



a) Dessinez dans le plan (s) (plan de Laplace), le contour de Nyquist qui permettra d étudier la stabilité du système.



Contour C dans le plan (s)
(ou plan de Laplace)

b) Qu est qu un système à phase minimale ?

Un système dont la fonction de transfert G(s)H(s) (fonction de transfert de la chaîne ouverte) ne comporte aucun pôle ou zéro à partie réelle positive (dans le demi-plan droit de Laplace).

c) Énoncez le critère du revers pour les plans de Nyquist et de Black.

voir les notes de cours

d) À partir du contour dans le plan de Laplace, tracez le lieu de Nyquist. Justifiez la construction du tracé étape par étape. Vous pouvez utiliser et joindre la page 8 du questionnaire à votre cahier d examen.

On applique le critère du revers. On trouve la réponse en fréquence du système :

$$G(s) = \frac{200}{(s+1)(s+5)(s+10)}$$

$$|G(jw)| = \left|\frac{200}{(jw+1)(jw+5)(jw+10)}\right| = \frac{|200|}{|(jw+1)||(jw+5)||(jw+10)|} = \frac{200}{\sqrt{w^2+1}\sqrt{w^2+25}\sqrt{w^2+100}}$$

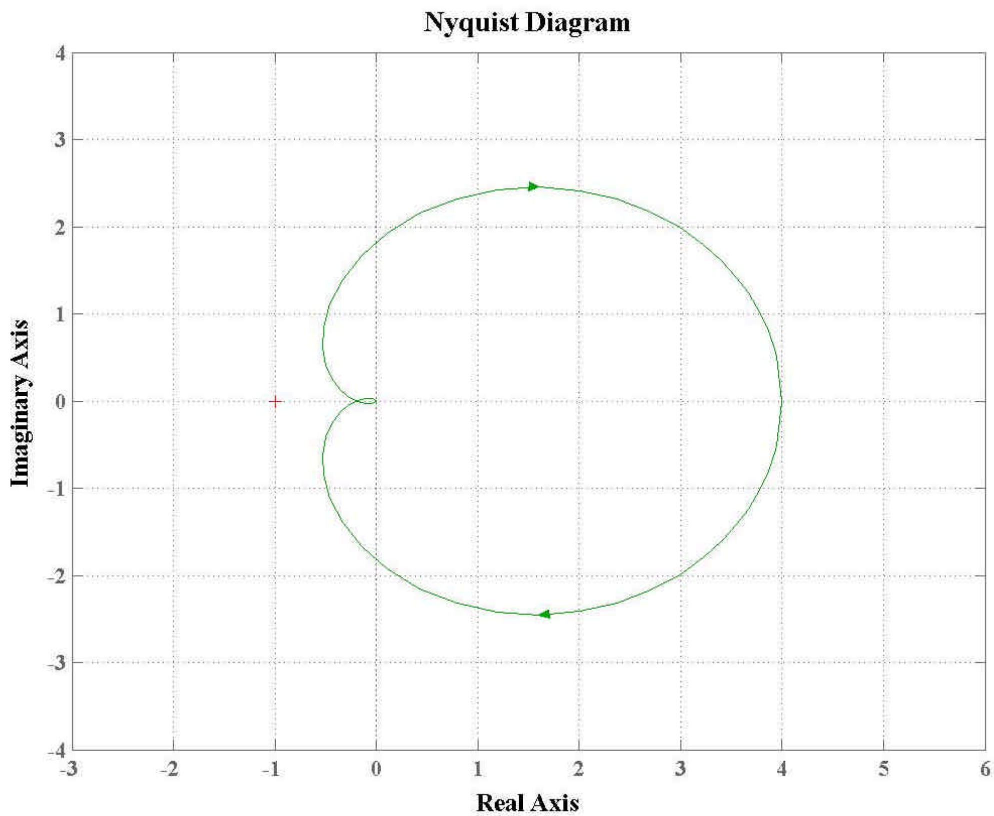
$$\angle G(jw) = -\tan^{-1}(w) - \tan^{-1}\left(\frac{w}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{w}{10}\right)$$

$w \to 0$

$|G(jw)| = 4 \ ; \ \angle G(jw) = 0$

$w \to \infty$

$|G(jw)| = 0 \ ; \ \angle G(jw) = -270$



e) Évaluez la stabilité du système en fonction du gain K.

Intersection avec l axe des réels :

$$G(s)=\frac{200}{(s+1)(s+5)(s+10)}$$

$$|G(jw)|=\frac{200}{(jw)^3+16(jw)^2+65jw+50}=\frac{200}{jw^3-16w^2+65jw+50}=\frac{200}{(50-16w^2)+w(w^2+65)j}$$

$$=\frac{200}{(50-16w^2)+w(65-w^2)j}\cdot\frac{(50-16w^2)-w(65-w^2)j}{(50-16w^2)-w(65-w^2)j}=200\frac{(50-16w^2)-w(65-w^2)j}{(50-16w^2)^2+w^2(65-w^2)^2}$$

$$\mathrm{Im}|G(jw)|=-200\frac{w(w^2+65)}{(50-16w^2)^2+w^2(w^2+65)^2}=0$$

$$0=w(65-w^2)$$

$$w=0$$

$$w=8.06$$

$$\mathrm{Re}|G(jw)|=200\left|\frac{(50-16w^2)}{(50-16w^2)^2+w^2(65-w^2)^2}\right|_{w=0}=4$$

$$\mathrm{Re}|G(jw)|=200\left|\frac{(50-16w^2)}{(50-16w^2)^2+w^2(65-w^2)^2}\right|_{w=8.06}=-0.2$$

Le système est stable pour $-0.25<K<5$

f) Démontrez pourquoi le lieu de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte peut être utilisé pour évaluer la stabilité du système en boucle fermée avec retour unitaire.

$$G(s)=\frac{N_G(s)}{D_G(s)}$$

$$H(s)=\frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

$$F(s)=1+KG(s)H(s)=1+K\frac{N_G(s)N_H(s)}{D_G(s)D_H(s)}=\frac{D_G(s)D_H(s)+KN_G(s)N_H(s)}{\mathbf{D_G(s)D_H(s)}}$$

$$G(s)H(s)=\frac{N_G(s)N_H(s)}{\mathbf{D_G(s)D_H(s)}}$$

g) Démontrez pourquoi le point critique (-1/K, 0) est utilisé lors de l application du critère de Nyquist. Quel est l avantage d utiliser ce point ?

Si on trace le lieu de Nyquist de $G(s)H(s)$ on doit considérer le nombre d encerclements en sens horaire du point (-1/K+0j) plutôt que le nombre d encerclements de l origine par $F(s)$. En effet :

$$F(s)=1+KG(s)H(s)=0$$

$$G(s)H(s)=-\frac{1}{K}$$

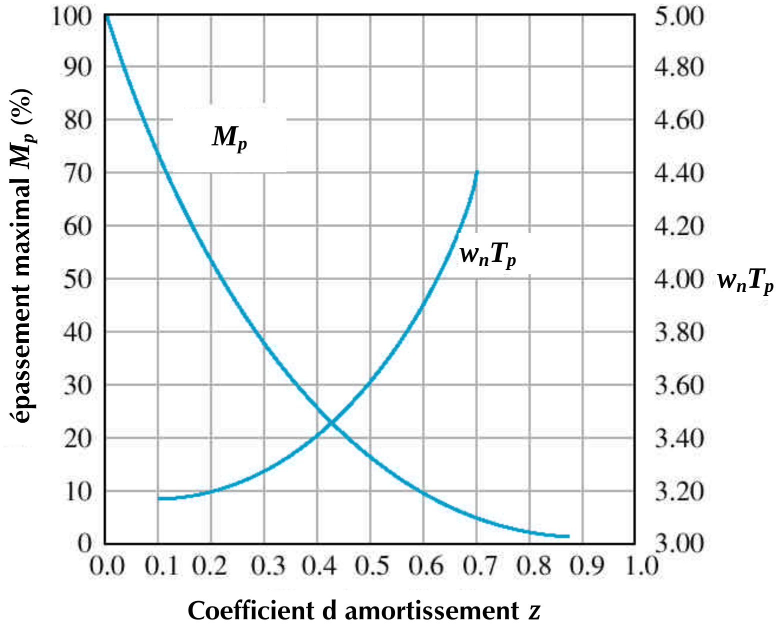
Ce qui permet de déplacer le point critique (-1/K+0j) le long de l axe des réels et d analyser la stabilité du système pour différentes valeurs de K.

TRANSFORMÉES DE LAPLACE :

$F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$ $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	
$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathcal{L}\{f(t)\}+b\mathcal{L}\{g(t)\}$	
$\mathcal{L}\{e^{as} f(t)\}=F(s-a)$ $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{as} f(t)$	
$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} F(s)\}=f(t-a)\, u_{-1}(t-a)$	
$1/s$	1
$1/s^2$	t
$1/s^n \quad (\mathrm{n}=1,2,...)$	$t^{n-1}/(n-1)!$
$\dfrac{1}{s-a}$	e^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)^2}$	te^{at}
$\dfrac{1}{(s-a)^n} \quad (\mathrm{n}=1,2,...)$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{at}$
$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq \mathrm{b}.)$	$\dfrac{1}{a-b}(e^{at}-e^{bt})$
$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad (a \neq \mathrm{b}.)$	$\dfrac{1}{a-b}(ae^{at}-be^{bt})$
e^{-as}/s	$u_{-1}(t-a)$
e^{-as}	$d(t-a)$

Dépassement et temps de réponse réduit pour un système du 2[e] ordre soumis à une entrée échelon :

Dépassement en fonction du coefficient d amortissement z



Temps de réponse réduit à 10% $w_n T_{s10\%}$ en fonction du coefficient d amortissement z