



Nom: _____

Prénom : _____

Matricule: _____

Groupe : _____

Nom: _____

Prénom : _____

Matricule: _____

Groupe : _____

MTH 1101 CALCUL I

Département de Mathématiques
et de Génie Industriel

Devoir 1
Automne 2010

Réservé

1.	/4
2.	/3
3.	/4
4.	/5
5.	/3
6.	/5
7.	/3
8.	/2
Clarté:	/1

Total:	/30
---------------	------------

Vous devez remettre un rapport par équipe de deux étudiant(e)s (au maximum), au plus tard lundi 4 octobre 2010 avant 11h00 am, dans le casier de votre groupe pour le cours MTH1101, près du local A-520.2. Dans le cas d'une équipe composée d'étudiant(e)s provenant de deux groupes différents, déposez le rapport dans le casier d'un des groupes et indiquez **très clairement** le groupe de chaque étudiant(e). Chaque membre d'une équipe recevra la même note.

Utilisez **obligatoirement** la page de présentation ci-jointe pour la remise de votre rapport et inscrivez tous les renseignements demandés.

Lors de la correction, il sera tenu compte de la clarté de la présentation (**1 point**).

Tout plagiat sera sévèrement sanctionné.

Exercice 1 (4 points)

Considérons la suite définie par :

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_{n+1} &= 3 - \frac{1}{a_n}, \quad \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

- a) En utilisant le principe d'induction mathématique, démontrer que cette suite est strictement croissante, bornée inférieurement par 2 et supérieurement par 3 pour tout $n \geq 1$.
- b) En sachant que la suite est monotone et bornée, que concluez-vous ?
- c) Que vaut $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$?

Exercice 2 (3 points)

Déterminer si les suites suivantes convergent ou divergent.

- a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^n}$
- b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{50}{n(n+1)}$

Indice: Faire une décomposition en fractions partielles et utiliser la notion de série télescopique.

Exercice 3 (4 points)

Pour quelles valeurs de x les séries suivantes convergent-elles ?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-2)^n$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{2^n} \frac{(x-1)^n}{(3n-1)}$

Exercice 4 (5 points)

a) Trouver la valeur positive de x telle que

$$5 \sum_{n=-1}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{x}\right)^{-n} = 36.$$

b) Trouver la valeur des coefficients a_0, a_1, a_2 dans l'équation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = \int_1^x e^{-t^2} dt.$$

Exercice 5 (3 points)

Considérons la fonction $f(x)$ définie par :

$$f(x) = \int_{\pi}^x \frac{\cos(t)}{t} dt$$

a) Par dérivation de $f(x)$, donner un polynôme de Taylor de degré 1, noté $P_1(x)$, qui approxime $f(x)$ autour de $a = \pi$.

b) Sachant que $|f''(x)| \leq 0,25, \forall x \in [\pi, 2\pi]$, donner une borne supérieure sur l'erreur commise en approximant $f(x)$ par $P_1(x)$ dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$.

Exercice 6 (5 points)

Une particule se déplace le long d'une droite. En fonction du temps t , sa distance $y = y(t)$ par rapport à un point de référence sur cette droite est décrite par l'équation

$$t^3 y + t y^3 = 2.$$

On suppose qu'à l'instant $t = 1$ seconde, la distance entre la particule et la référence est de 1 mètre.

- a) Donner la vitesse et l'accélération de la particule par rapport à la référence au temps $t = 1$ seconde.

Indice: Utiliser la notion de dérivation implicite.

- b) Donner un polynôme de Taylor de degré 2, qui approxime $y(t)$ noté $P_2(t)$, autour de $a = 1$ seconde .

- c) À l'aide de ce polynôme, estimer la distance de la particule par rapport à la référence au temps $t = 3$ secondes.

Exercice 7 (3 points)

Soient deux nombres complexes w_1 et w_2 définis par:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ w_2 &= \sqrt{r} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) \right]. \end{aligned}$$

- a) En utilisant des identités trigonométriques, exprimer w_1 en fonction de w_2 .
- b) Est-ce que w_1 et w_2 sont les racines carrées de $r [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$?

Exercice 8 (2 points)

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.

- a) Écrire $|iz|$ en fonction de $|z|$.
- b) Écrire $\arg(iz)$ en fonction de $\arg z$.