

Question 1 (3 points)

Considérons la suite définie par

$$u_{n+1} = a u_n + b \quad \text{pour } n \geq 0$$

où $a \neq 1$, $b \neq 0$ et $u_0 - \frac{b}{1-a} \neq 0$.

- a) Exprimez u_n en fonction de n , a , b et u_0 . Simplifiez votre réponse.

$$\text{Indice: } 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

- b) Pour quelles valeurs de a la suite $\{u_n\}$ converge-t-elle?

Solution 1

- a)

$$u_1 = au_0 + b$$

$$u_2 = au_1 + b = a(au_0 + b) + b = a^2u_0 + ab + b$$

$$\vdots$$

$$u_n = a^n \left(u_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a}$$

- b) $|a| < 1$

Question 2 (4 points)

Déterminez si les séries suivantes convergent ou divergent.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan(n+1).$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \sqrt{n}}{2n^{3/2} + 2}.$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n-1}}.$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[n \sin\left(\frac{1}{n}\right) + 2 \right]^n.$

Solution 2

- a) Par le test de divergence la série diverge.
- b) Par le test forme limite du test de comparaison la série diverge
- c) Par le test d'une série alternée la série converge.
- d) Par le test de Cauchy (racine n-ième) la série diverge.

Question 3 (6 points)

Trouvez le rayon et l'intervalle de convergence de la série entière suivante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^n}{\sqrt{n+1}} (x+1)^{2n+1}$$

N'oubliez pas l'étude aux bornes de l'intervalle s'il est fini.

Solution 3

$$I = \left[-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \text{ et } R = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Question 4 (6 points)

On considère la fonction $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- a) Donnez $T_2(x)$, le polynôme de Taylor de degré 2 centré en $a = 8$ de $f(x)$.
Rappel: $8^{1/3} = 2$.
- b) Utilisez le résultat précédent pour estimer la valeur $9^{1/3}$.
- c) En sachant que $|f^{(3)}(x)| \leq 10^{-2}$ pour tout $x \in [7, 9]$, donnez une borne supérieure sur l'erreur, en valeur absolue, lorsqu'on approxime $f(x)$ par $T_2(x)$ sur l'intervalle $[7, 9]$.

Solution 4

- a) $T_2(x) = 2 + \frac{1}{12}(x-8) - \frac{1}{288}(x-8)^2$
- b) $9^{1/3} \approx \frac{599}{288}$

c) $\frac{1}{600}$

Question 5 (6 points)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^x t^3 \cos(t^2) dt, \quad \text{où } x \geq 0.$$

- a) Donnez $T(x)$ la série de Taylor de $f(x)$ autour de $a = 0$. Exprimez votre réponse en utilisant le signe $\sum$.
- b) On approxime $f(1)$ par $\frac{1}{4}$. Quelle est l'erreur maximale générée par cette approximation ?

Solution 5

a) $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n+1)} \frac{x^{4n}}{(2n-2)! \cdot 4n}$

b) $\frac{1}{16}$