Question 1 (10 points) (2, 2, 3, 3)

Une firme d'ingénieur-conseil soumissionne sur 3 projets municipaux A, B et C. La probabilité qu'elle gagne C est de 0.5. La probabilité qu'elle gagne A ou B ou C est de 0.87. La probabilité qu'elle perde A et B (pas de A et pas de B) est de 0.29. La probabilité qu'elle gagne A et C est de 0.19. De plus, la probabilité qu'elle gagne A sachant qu'elle a gagné B et C est de 1/6.

a) Quelle est la probabilité que la firme gagne uniquement le projet C ?

b) Quelle est la probabilité (conjointe) que la firme gagne B et C et perde A ?

c) Quelle est la probabilité (conjointe) que la firme gagne les 3 soumissions ?

d) La probabilité que la firme gagne les projets A et B est de 0.1. Donner la fonction de masse de la variable X représentant le nombre de projets gagnés par la firme.

Réponse :

De l'énoncé on a :
$P(A \cup B \cup C) = 0.87 \Rightarrow P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = 1 - 0.87 = 0.13.$
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0.29 \Rightarrow P(A \cup B) = 1 - 0.29 = 0.71.$
$P(A \cap C) = 0.19.$
$P(A|B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)} = \frac{1}{6}.$

Faire le diagramme de VENN (à venir).

a) $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = P(A \cup B \cup C) - P(A \cup B) = \mathbf{0.16}.$

b) Posons : $a = P(A \cap B \cap C), b = P(\bar{A} \cap B \cap C),\ \ c = P(A \cap \bar{B} \cap C).$
$P(C) = 0.5 = a + b + c + 0.16 \Rightarrow a + b + c = 0.5 - 0.16 = 0.34.$
$P(A \cap C) = a + c = 0.19 \Rightarrow b = 0.34 - 0.19 = 0.15.$
On trouve donc P(gagner B et C et perdre A) = $P(\bar{A} \cap B \cap C), = b = \mathbf{0.15}.$

c) $P(B \cap C) = 6P(A \cap B \cap C) \Rightarrow a + b = 6a \Rightarrow a = \frac{b}{5} = 0.03$ et $c = 0.19 - 0.03 = 0.16$
Donc P(gagner les 3 projets) = $P(A \cap B \cap C) = a = \mathbf{0.03}.$

d) $P(A \cap B) = a + d = 0.1 \Rightarrow d = P(A \cap B \cap \bar{C}) = 0.1 - a = 0.07.$ On aura donc le tableau :

x : Nb projets gagnés	0	1	2	3
$P_X(x)$	0.13	0.46	b+c+d = 0.38	a = 0.03

Question 2 (10 points) (3.5, 3.5, 3)

Une chaîne de montage d'ordinateurs utilise un lot de processeurs contenant 2% d'éléments défectueux. En début de chaîne, chaque processeur est vérifié par un testeur dont la fiabilité n'est pas parfaite. D'antérieures études ont montré que 95% des processeurs en bon état sont déclarés bons et 94% des processeurs défectueux sont déclarés défectueux.

a) Quelle est la probabilité qu'un processeur soit testé bon ?

b) Quelle est la probabilité qu'un processeur testé défectueux soit réellement défectueux ?

c) Sur un lot de 4 processeurs testés indépendamment l'un de l'autre, quelle est la probabilité qu'il y ait <u>exactement</u> un processeur déclaré défectueux par le testeur ?

<u>Réponse</u> :

Soit les événements : C : le processeur est conforme (bon), T : le test déclare que le processeur est bon.

$P(C) = 0.98,\ \ P(\bar{C}) = 0.02, \qquad P(T|C) = 0.95 \Rightarrow P(\bar{T}|C) = 0.05, \qquad P(\bar{T}|\bar{C}) = 0.94 \Rightarrow P(T|\bar{C}) = 0.06$

a) $P(T) = P(T|C)P(C) + P(T|\bar{C})P(\bar{C}) = \mathbf{0.9322}$. (Loi des probabilités totales)

b) $P(\bar{C}|\bar{T}) = \frac{P(\bar{T}|\bar{C})P(\bar{C})}{P(\bar{T}|\bar{C})P(\bar{C})+P(\bar{T}|C)P(C)} = \frac{0.02*0.94}{0.068} = \mathbf{0.276}$. (Loi de Bayes)

c) *P*(seulement composant 1 déclaré défectueux) = $P(\bar{T}_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4) = (\text{par indépendance}) =$ $P(\bar{T}_1)P(T_2)P(T_3)P(T_4) = (1-0.932)0.932^3 = 0.055.$

Or, il y a 4 manières de fixer le composant défectueux (1, 2, 3 ou 4).

Donc, *P*(1 seul déclaré défectueux) = 4(0.055) = ***0.22.***

Question 3 (10 points) (3, 2.5, 4.5)

Le nombre de pannes (X) observées annuellement aux feux de circulation d'une importante intersection suit la distribution donnée au tableau suivant :

x : Nb de pannes	0	1	2	3 ou plus
$P_X(x)$	0.3	0.5	0.2	0

Le coût de réparation (Y en \$) des feux défectueux est : $Y = 500(e^X - 1)$.

a) Calculer $E(X)\ et\ E(\sqrt{X})$.

b) Quelle est la probabilité de débourser au moins 1000$ annuellement en frais de réparation ?

Lorsqu'il y a panne, la durée (T en heure) de la panne est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est :

$$F_T(t) = 1 - e^{-2t} \text{ si } t \geq 0 \text{ (0 ailleurs).}$$

Les durées des pannes sont indépendantes les unes des autres.

c) Quelle est la probabilité d'observer au cours de la prochaine année au moins une panne dont la durée est comprise entre 30 et 60 minutes à l'intersection en question ?

Réponse :

a) $E(X) = \sum x P_X(x) = 0(0.3) + 1(0.5) + 2(0.2) = \mathbf{0.9}$.

$E(\sqrt{X}) = \sum \sqrt{x} P_X(x) = 0(0.3) + 1(0.5) + \sqrt{2}(0.2) = \mathbf{0.78}$

b) $P(Y \geq 1000) = P(500(e^X - 1) \geq 1000) = P(e^X - 1 \geq 2) = P(X \geq ln3 = 1.09) = P(X \geq 2) = \mathbf{0.2}$.

c) Calculons d'abord la probabilité qu'une panne dure entre 30 et 30 minutes $= P(0.5 < T < 1) = F_T(1) - F_T(0.5) = e^{-2(0.5)} - e^{-2(1)} = 0.367 - 0.135 = 0.232$.

Soit D : le nombre de panne ayant duré entre 30 et 60 minutes. On cherche $P(D \geq 1) = 1 - P(D = 0)$ car D est discrète.
$P(D = 0) = P(X = 0) + P(X = 1\ et\ \overline{0.5 < T < 1}) + P\big(X = 2 \text{ et } \overline{0.5 < T_1 < 1} \text{ et} \overline{0.5 < T_2 < 1}\big) =$ $0.3 + P(X = 1)P(\overline{0.5 < T < 1}) + P\big(X = 2)P\big(\overline{0.5 < T_1 < 1}\big)P\big(\overline{0.5 < T_2 < 1}\big) = 0.3 +$ $0.5(0.768) + 0.2(0.767)^2 = 0.801$ (On multiplie en appliquant l'indépendance entre les durées des pannes). Finalement $P(D \geq 1) = 1 - 0.801 = \mathbf{0.198.}$

Note : On peut calculer directement $P(D \geq 1)$, mais ceci implique beaucoup de cas à considérer.

Question 4 (10 points) (3, 3.5, 3.5)

La demande quotidienne en électricité (kW) pour des maisons de type 1 et de type 2 sont des variables aléatoires notées *X* et *Y* respectivement. Leurs fonctions de densité sont :

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } 1 \leq y \leq 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) Calculer la moyenne et l'écart type de la demande quotidienne pour une maison de type 1.

b) Quelle est la probabilité que la demande totale de deux maisons de types différents (*X*+*Y*) soit supérieure à 6 kW si on suppose que les demandes des deux maisons sont indépendantes.

On considère maintenant une localité de 50 maisons de type 1. Par expérience, on sait qu'il existe une corrélation de 0.4 entre les demandes de chaque couple de maisons.

c) Calculer la moyenne et l'écart type de la demande quotidienne totale de cette localité.

<u>Réponse</u> :

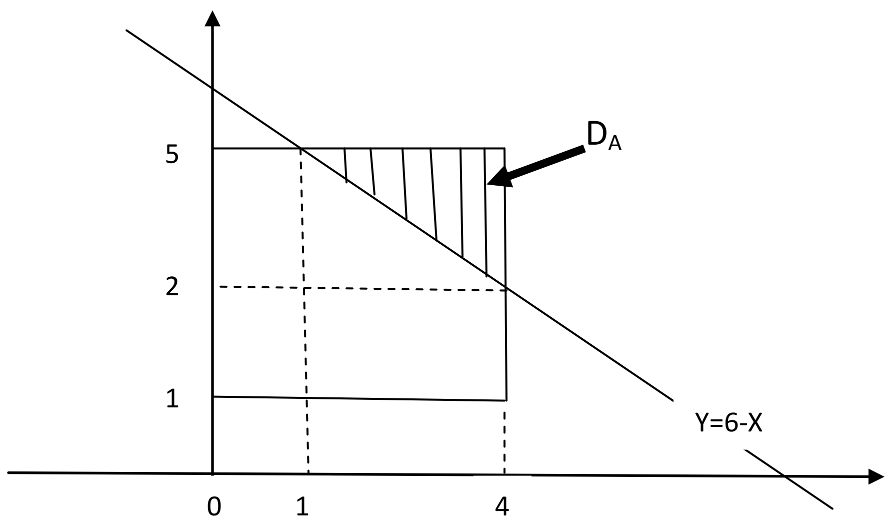
a) $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \int_0^4 x\frac{1}{8}xdx = \frac{1}{24}x^3\Big]_0^4 = \frac{8}{3} = \mathbf{2.666}\ \boldsymbol{kW}$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ où $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^4 x^2\frac{1}{8}xdx = \frac{1}{32}x^4\Big]_0^4 = 8$

Donc $V(X) = \frac{8}{9} = 0.888 \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{0.888} = \mathbf{0.922}\ \boldsymbol{kW}$

b) $P(X + Y > 6) = \iint f_{X,Y}(x, y)dxdy$ sur Domaine de l'événement A : $X + Y > 6$.

Par indépendance : $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{32}x & \text{si } 0 \le x \le 4 \text{ et } 1 \le y \le 5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$



$$P(X+Y>6) = \int_{x=1}^{4} \int_{y=6-x}^{5} \frac{1}{32} x\,dy\,dx = \int_{x=1}^{4} \left\{ \frac{1}{32} xy \right\}_{y=6-x}^{y=5} dx = \mathbf{0.42}.$$

c) Soit X_i demande quotidienne de la maison i (i = 1 à 50).
$Y = \sum_{i=1}^{50} X_i$ demande totale de la localité.

On cherche $E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_{50}) = E(X_1) + \cdots + E(X_{50}) = 50(2.666) = \mathbf{133.33\ kW}$

$V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_{50}) = V(X_1) + \cdots + V(X_{50}) + 2(1)(1) \sum_{tous\ les\ couples} cov(X_i, X_j)$

$cov(X_i, X_j) = \rho_{j,j} \sigma_i \sigma_j = 0.4 * 0.922 * 0.922 = 0.355$

Or il y a $C_2^{50} = 1225$ couples de maisons, donc $V(Y) = 50\left(\frac{8}{9}\right) + 2(1225)0.355 = 914.15$

$\Rightarrow\ \sigma_Y = \mathbf{30.23\ kW}$.