

## Corrigé - Contrôle périodique 1

### Question 1 (20 points)

Un réseau de distribution d'électricité est composé de trois stations A, B, C.

Définissons les événements suivants :

A : station A surchargée, B : station B surchargée, C : station C surchargée.

Soit les événements  $W_i$  où  $i = 1, 2, \dots, 8$ , définis comme suit :

$$W_1 = A \cap B \cap C, W_2 = A \cap B \cap \bar{C}, W_3 = A \cap \bar{B} \cap C, W_4 = \bar{A} \cap B \cap C \\ W_5 = A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, W_6 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap C, W_7 = \bar{A} \cap B \cap \bar{C}, W_8 = \bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C}$$

Le réseau peut tomber en panne à cause de la surcharge d'une des trois stations ou pour d'autres raisons indépendantes des stations. Par expérience, on a les probabilités suivantes :

| $i$        | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $P(W_i)$   | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.02 | 0.05 | 0.05 | 0.05 | ?    |
| $P(D W_i)$ | 0.5  | 0.2  | 0.3  | 0.1  | 0.15 | 0.1  | 0.05 | 0.01 |

D étant l'événement : Réseau en panne

- Calculer  $P(C)$ .
- Calculer la probabilité qu'une panne de réseau survienne.
- Calculer la probabilité que la surcharge de la station A soit l'unique cause d'une panne.
- Calculer la probabilité qu'une panne soit causée par une autre raison autre que la surcharge d'une ou plusieurs stations.

### Réponse :

- (5 points)  $P(C) = P(W_1) + P(W_3) + P(W_4) + P(W_6) = \mathbf{0.11}$ .
- (5 points) Il faut d'abord calculer  $P(W_8) = 1 - \sum_{i=1}^7 P(W_i) = 0.77$   
 Ensuite calculer  $P(D) = \sum_{i=1}^8 P(D|W_i) * P(W_i) = \mathbf{0.0427}$ .
- (5 points) On cherche  $P(W_5|D) = \frac{P(D|W_5) * P(W_5)}{P(D)} = \frac{0.15 * 0.05}{0.0427} = \mathbf{0.1756}$
- (5 points) On cherche  $P(W_8|D) = \frac{P(D|W_8) * P(W_8)}{P(D)} = \frac{0.01 * 0.77}{0.0427} = \mathbf{0.1803}$ .

**Question 2 (14 points)**

Deux villes A et B sont séparées par 3 feux de circulation (F1, F2, F3) chacun ayant un cycle d'une minute; les feux verts ayant des durées respectives de 50, 50 et 40 secondes (voir figure1). On suppose qu'on respecte les lois de la circulation et l'indépendance des trois feux de circulation.

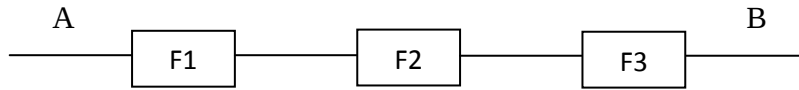


Figure 1

- a) Calculer la probabilité de faire le trajet entre A et B avec exactement 1 arrêt.
- b) Supposons qu'il existe un autre chemin (secondaire) entre A et B contenant 2 feux de circulation (F4, F5) chacun ayant un cycle d'une minute; les feux verts ayant des durées respectives de 20 et 10 secondes (voir figure2). On admet les mêmes conditions que ci-dessus (indépendance des feux et respect des lois de circulation).

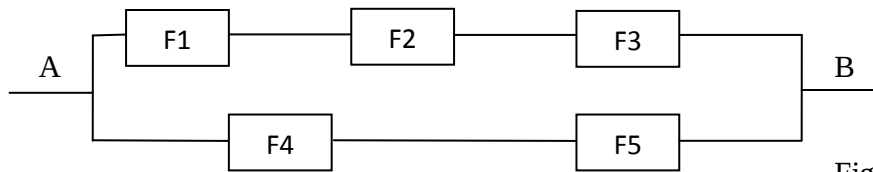


Figure 2

Sachant que chaque automobiliste choisit aléatoirement le chemin principal (F1-F2-F3) ou le chemin secondaire (F4-F5) avec une probabilité de 0.5, calculez la probabilité qu'un automobiliste puisse faire le trajet de A à B sans faire d'arrêt.

**Réponse :**

Soit les événements  $F_i$  : On s'arrête au Feu  $F_i$  avec  $i=1,2,3,4,5$

- a) (7 points) On cherche  $P(1 \text{ seul arrêt}) = P(F1 \cap \overline{F2} \cap \overline{F3}) + P(\overline{F1} \cap F2 \cap \overline{F3}) + P(\overline{F1} \cap \overline{F2} \cap F3)$   
 $= (1/6 * 5/6 * 4/6) + (5/6 * 1/6 * 4/6) + (5/6 * 5/6 * 2/6) = 45/108 = \mathbf{0.4166}$   
 (Utiliser l'indépendance pour transformer  $\cap$  en un  $*$ )

- b) (7 points) Soit les événements : P : suivre le chemin principal,  
 S : suivre le chemin secondaire,  
 T : effectuer le trajet sans aucun arrêt.

$P(P)=P(S)=0.5$ , les événements P et S forment une partition.

On cherche  $P(T) = P(T|P)*P(P) + P(T|S)*P(S)$

Or  $P(T|P) = P(\overline{F1} \cap \overline{F2} \cap \overline{F3}) = 5/6 * 5/6 * 4/6 = 100/216 = 25/54 = 0.4629$

$P(T|S) = P(\overline{F4} \cap \overline{F5}) = 2/6 * 1/6 = 1/18 = 0.055$

$$\text{Donc } P(T) = \frac{25/54 + 1/18}{2} = 28/108 = \mathbf{0.2592}$$

**Question 3 (12 points)**

Une variable aléatoire discrète  $X$  a pour fonction de répartition  $F_X(x)$  définie comme suit :

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \text{pour } x = 1, 2, 3, \dots$$

- a) Donner la fonction de masse de  $X$ .
- b) Calculer  $P(2 \leq X \leq 10)$ .

**Réponse :**

- a) (7 points)  $P_X(x) = F_X(x) - F_X(x-1) = 1 - \frac{1}{x+1} - \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(x+1)}$  pour  $x = 1, 2, 3, \dots$
- b) (7 points)  $P(2 \leq X \leq 10) = P(1 < X \leq 10) = F_X(10) - F_X(1) = 1 - \frac{1}{11} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \mathbf{9/22}$ .

**Question 4 (10 points)**

Des plaques d'immatriculation sont constituées de trois lettres suivies de quatre chiffres. On suppose que les lettres I et O ne sont jamais utilisées.

- a) Combien de plaques différentes peut-on former si aucune plaque ne doit comporter quatre zéros (0000)?
- b) Combien de plaques différentes peut-on former si aucune plaque ne doit comporter trois lettres identiques ou quatre chiffres identiques?

**Réponse :**

- a) (5 points) On forme les lettres et les chiffres et on multiplie les résultats.  
 Il y a  $24^3$  pour la partie des lettres  
 et  $(10^4 - 1)$  pour la partie des chiffres (Il y a juste 1 combinaison interdite : 0000)  
 On obtient alors  $24^3(10^4 - 1) = \mathbf{138226176}$  plaques différentes.
- b) (5 points) Même démarche qu'en a), ici il y a plusieurs combinaisons à refuser dans les deux compartiments de la plaque.  
 Lettres :  $(24^3 - 24)$  car 24 combinaisons comportent 3 lettres identiques : aaa, bbb, ..., zzz  
 Chiffres :  $(10^4 - 10)$  car 10 combinaisons comportent 4 chiffres identiques : 0000, 1111, ..., 9999  
 On obtient alors  $(24^3 - 24)(10^4 - 10) = 13800 * 9990 = \mathbf{137862000}$  plaques différentes.

**Question 5 (12 points)**

Toute pièce fabriquée dans une certaine usine peut présenter deux types de défaut : un défaut sur la hauteur et un défaut sur le diamètre. Par expérience, on sait que sur 100 pièces prises au hasard, 80 ne présentent aucun défaut, 10 présentent un défaut sur la hauteur et 5 présentent les deux défauts. Une pièce est choisie au hasard.

- Calculer la probabilité que la pièce présente un seul défaut.
- Sachant que la pièce présente un seul défaut, quelle la probabilité que le défaut soit sur le diamètre?
- Supposant que toute pièce génère un profit de 10\$, mais si elle présente au moins un défaut, on la répare au coût de 3\$ par défaut. Calculer le profit net moyen par pièce.

**Réponse :**

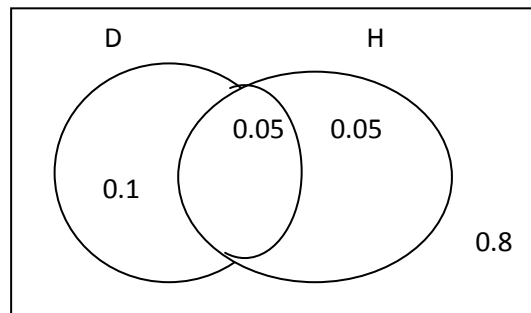
Note : l'utilisation du diagramme de VENN aide considérablement à la résolution.

On définit les événements :

H : la pièce présente un défaut sur la hauteur,

D : la pièce présente un défaut sur le diamètre.

$$P(\bar{H} \cap \bar{D}) = 0.8, P(H) = 0.1, P(H \cap D) = 0.05$$



- (3 points) On cherche  $P(H \text{ seulement ou } D \text{ seulement}) = P(H \cap \bar{D}) + P(\bar{H} \cap D) = 0.05 + 0.1 = \mathbf{0.15}$
- (4 points) On Cherche  $P(D | ([H \cap \bar{D}] \cup [\bar{H} \cap D])) = \frac{P(D \cap ([H \cap \bar{D}] \cup [\bar{H} \cap D]))}{P([H \cap \bar{D}] \cup [\bar{H} \cap D])} = \frac{P(\bar{H} \cap D)}{0.15} = 0.1/0.15 = \mathbf{2/3}$
- (5 points) Soit les variables aléatoires suivantes :

X : le nombre de défauts sur la pièce, Y : le profit net généré par la pièce (\$)

|          |     |      |      |
|----------|-----|------|------|
| x        | 0   | 1    | 2    |
| y (\$)   | 10  | 7    | 4    |
| $P_Y(y)$ | 0.8 | 0.15 | 0.05 |

On cherche  $E(Y) = \sum_y y P_Y(y) = \mathbf{9.25\$}$

**Question 6 (20 points)**

Un kiosque à journaux reçoit chaque matin 20 exemplaires du *Journal de Montréal*. Il se présente à ce kiosque, en moyenne, 20 clients par jour (9h-17h) à la recherche de ce journal. On admet que la demande suit un processus de Poisson. Les exemplaires non vendus en une journée ne sont plus utilisables le lendemain.

- Si un client se présente à 12h, quelle est la probabilité qu'il puisse acheter un exemplaire ?
- Quelle est la probabilité que le kiosque vende tous les exemplaires dans une journée?
- En moyenne, combien de jours s'écoulent avant que le kiosque ne connaisse une journée où tous les exemplaires reçus se vendent (en incluant cette dernière journée)?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux jours durant lesquels les exemplaires se vendent tous au cours d'une semaine de 5 jours?

**Réponse :**

- (5 points) Soit les variables

$X$  : le nombre de clients durant la journée (les 8 heures),  $X \sim P(\alpha = 20)$

$Y$  : le nombre de clients entre 9h et 12h (les 3 heures),  $Y \sim P(\alpha' = 20 * \frac{3}{8} = 7.5)$

On cherche  $P(Y \leq 20) = \mathbf{0.999}$  (voir table p.546).

- (5 points) On cherche  $P(X \geq 20) = 1 - P(X \leq 19) = 1 - 0.47 = \mathbf{0.53}$  (voir table p.546).
- (5 points) Soit la variable  $T$  : nombres de journées nécessaires pour connaître une journée pleine (tout est vendu).  
 $T \sim G(p = 0.53)$ , et on cherche  $E(T) = 1/p = 1/0.53 = \mathbf{1.886 \text{ jours}}$ .
- (5 points) Soit la variable  $D$  : nombre de journées pleines (tout est vendu) sur les 5 jours de la semaine.  
 $D \sim B(n = 5, p = 0.53)$ , et on cherche  $P(D \geq 2) = 1 - P(D \leq 1) = 1 - (\sum_{d=0}^1 C_d^5 0.53^d 0.47^{5-d})$   
 $= 1 - (0.0229 + 0.12931) = 1 - 0.15221 = \mathbf{0.84779}$ .

**Question 7 (12 points)**

Dans une collection de 100 roches, 50 sont de type basalte et 50 sont de type granite. Cinq roches sont choisies au hasard (sans remise) pour des fins d'analyses chimiques. Soit  $X$  le nombre de roches de type basalte dans l'échantillon.

- a) Précisez la loi exacte de la variable  $X$  et ses paramètres.
- b) Quelle est probabilité que l'échantillon contienne seulement des roches de même type? (ne pas faire de calcul).
- c) Utiliser une loi d'approximation appropriée pour calculer la probabilité demandée à la question b).

**Réponse :**

a) (3 points)  $X \sim H(N = 100, D = 50, n = 5)$  (Hypergéométrique)

b) (4 points) On cherche  $P(X = 0) + P(X = 5) = \frac{C_0^{50} C_5^{50} + C_5^{50} C_0^{50}}{C_5^{100}} = \frac{2C_5^{50}}{C_5^{100}}$

c) (5 points) Puisque  $n/N = \frac{5}{100} = 0.05 < 0.1$ , On peut approximer une hypergéométrique

par une Binomiale. Donc,  $X \approx B(n = 5, p = \frac{D}{N} = 0.5)$

$$P(X = 0) + P(X = 5) = C_0^5 0.5^0 0.5^5 + C_5^5 0.5^5 0.5^0 = 2 * 0.5^5 = \mathbf{0.0625}$$