Mth2302C - Automne2011 - CP 1 - Corrigé

Question 1 (24 points)

Le temps requis pour compléter un projet de construction dépend de la possibilité de grève chez les employés constitués de menuisiers et plombiers. Soit les événements :

A : les menuisiers tombent en grève durant le projet.

B : les plombiers tombent en grève durant le projet.

R : le projet est complété en retard.

Les probabilités conditionnelles de délai (projet complété en retard) sont :

Événement	$R\|A \cap B$	$R\|A \cap \bar{B}$	$R\|\bar{A} \cap B$	$R\|\bar{A} \cap \bar{B}$
Probabilité	1	0.8	0.4	0

Par expérience, on sait que :

les menuisiers et les plombiers tombent en grève indépendamment les uns des autres;

la probabilité de grève chez les plombiers est de 0.1 et celle chez les menuisiers est de 0.15.

a) Calculer la probabilité que seuls les menuisiers tombent en grève.

b) Calculer la probabilité de compléter le projet en retard.

c) S'il y a eu délai (retard), quelle est la probabilité qu'il soit causé par la grève des plombiers ?

d) On compte 15 menuisiers et 10 plombiers dans le projet. Donner la fonction de masse de la variable aléatoire X qui représente le nombre d'employés en grève durant le projet.

Réponse :

a) **(6 points)** On cherche$P(A \cap \bar{B})$. On a $P(A) = 0.1$ et $P(B) = 0.15$.
Par indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.015$.
Ensuite remplir le diagramme de Venn on obtenir :
$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0.15 - 0.015 = \mathbf{0.135}$
On peut aussi calculer (pour les prochaines questions) :

$P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0.1 - 0.015 = 0.085.$
$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A \cup B) = (0.1 + 0.15 - 0.015) = 0.765.$

b) **(6 points)** On cherche : $P(R) = P(R|A \cap B)P(A \cap B) + P(R|A \cap \bar{B})P(A \cap \bar{B}) + P(R|\bar{A} \cap B)P(\bar{A} \cap B) + P(R|\bar{A} \cap \bar{B})P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1(0.015) + 0.8(0.135) + 0.4(0.085) + 0(0.765) = \mathbf{0.157}$.

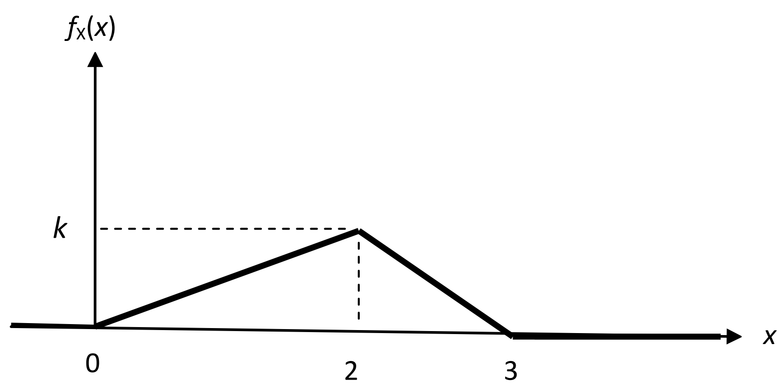
c) **(6 points)** On cherche : $P(B|R) = P(A \cap B|R) + P(\bar{A} \cap B|R) = \frac{P(R|A\cap B)P(A\cap B)}{P(R)} + \frac{P(R|\bar{A}\cap B)P(\bar{A}\cap B)}{P(R)} = \frac{1(0.015)+0.4(0.085)}{0.157} = \mathbf{0.3121}$.

d) **(6 points)**

x	*0*	*10*	*15*	*25*
$P_X(x)$	$P(X=0) = P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.765$	$P(X=10) = P(\bar{A} \cap B) = 0.085$	$P(X=15) = P(A \cap \bar{B}) = 0.135$	$P(X=25) = P(A \cap B) = 0.015$

Question 2 (14 points)

La longueur (mm) d'une fissure sur une structure soudée est décrite par une variable aléatoire X dont la densité de probabilité $f_X(x)$ est donnée par le graphe ci-dessous.



a) Calculer la valeur de la constante *k*.

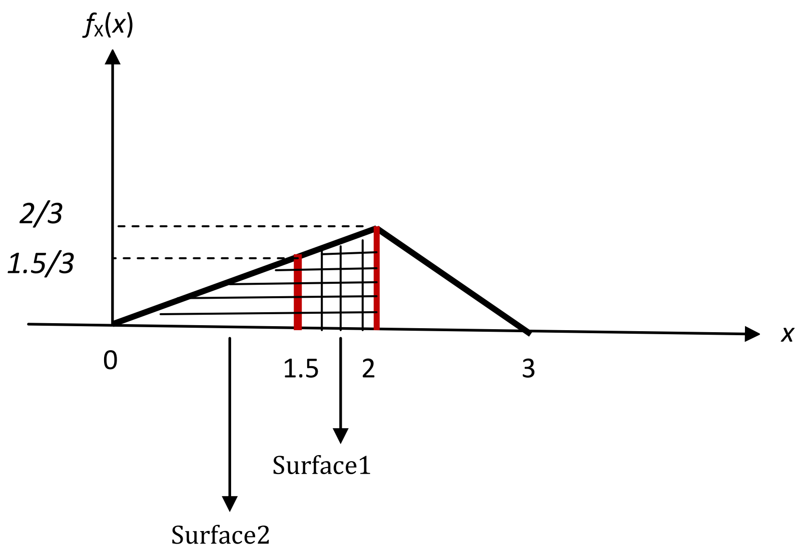
b) Parmi les fissures ayant une longueur inférieure à 2 mm, quel est le pourcentage de fissures ayant une longueur entre 1.5 et 2.5 mm ?

Réponse :

a) **(6 points)** Surface totale = 1 $\Rightarrow \frac{2k}{2} + \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow \boldsymbol{k} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$.

b) **(8 points)** On cherche $P(1.5 < X < 2.5|X < 2) = \frac{P((1.5<X<2.5)\cap(X<2))}{P(X<2)} = \frac{P(1.5<X<2)}{P(X<2)} =$

$\frac{Surface1}{Surface2} = \frac{\frac{2*\frac{2}{3}}{2} - (1.5*1.5/3)/2}{(2*2/3)/2} = \frac{0.875/3}{2/3}$ = ***43.75%***.



Question 3 (20 points)

Une compagnie de location d'outils possède 10 appareils de même type. La location de chaque appareil rapporte à la compagnie 300$ par heure. À la récupération de chaque appareil, la compagnie doit réparer les petites pannes survenues lors de l'utilisation de l'appareil.

Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de pannes survenant lorsque l'appareil est loué pour une période de durée T (heure). X suit une loi de Poisson de moyenne 0.5T. La réparation, par appareil, coûte à la compagnie $100X^2$ \$.

a) Quelle est la probabilité qu'un appareil ait plus de 3 pannes après une location pour une période d'une heure ?

b) Montrer que $E(X^2) = 0.5T + 0.25T^2$.

c) Exprimer, en fonction de T, le profit net moyen généré par un appareil après une location pour une période d'une durée T. Pour quelle valeur de T ce profit est-il maximum ?

d) Supposons que les 10 appareils sont loués pour une journée de 8 heures. Calculer la moyenne du nombre d'appareils générant une perte pour cette journée. Que peut-on conclure concernant la durée de location ?

Réponse :

a) **(4 points)** T = 1, alors $X \sim P(0.5)$. On cherche $P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0.998 =$ **0.002**.

b) **(4 points)** On sait que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ donc $E(X^2) = V(X) + (E(X))^2$

Comme $X \sim P(0.5T)$, E(X) = 0.5T et V(X) = 0.5T. D'où $\mathbf{E(X^2) = 0.5T + 0.25T^2}$.

c) **(6 points)** Soit P : le profit net par appareil après une location pour une durée T.
$P = 300T -$ frais de réparation $= 300T - 100X^2$
On cherche $E(P) = 300\mathrm{T} - 100E(X^2) = 300\mathrm{T} - 50\mathrm{T} - 25\mathrm{T}^2 = \mathbf{250T - 25T^2}$

Maximisons $E(P)$: $\frac{d(E(Y))}{dT} = 250 - 50T = 0$ ce qui donne $\boldsymbol{T_0} = \mathbf{5}$ **heures**. (La dérivée seconde est négative (-25), il s'agit bien d'un maximum).

d) **(6 points)** Soit la variable N : nombre d'appareils (parmi les 10) générant une perte.
$\boldsymbol{N \sim B(n = 10, p)}$
$p = P(\text{perte pour un appareil}) = P(P < 0) = P(300(8) - 100X^2 < 0) = P(X^2 > 24) =$
$P(X > 4.89) = 1 - P(X \leq 4)$. Ici $X \sim P(0.5 * 8) = P(4)$.
$p = 1 - 0.628 = 0.372$
Dans cette question, on cherche $E(N) = np = 10 * 0.372 = \mathbf{3.72}$

<u>Commentaire</u> : avec une telle fonction de profit, la compagnie n'a pas intérêt à louer ses appareils pour une longue durée (> 5 heures). À T = 5 heures, la moyenne du profit est maximale. À partir de 5 heures, le profit diminue et devient même négatif (avec une probabilité considérable) lorsque T= 8 heures.

Question 4 (12 points)

Afin de monter un système entre deux points 1 et 2, on utilise trois composants A, B et C dont les fiabilités (probabilités de fonctionnement sans panne) pour une certaine période sont données dans le tableau ci-dessous.

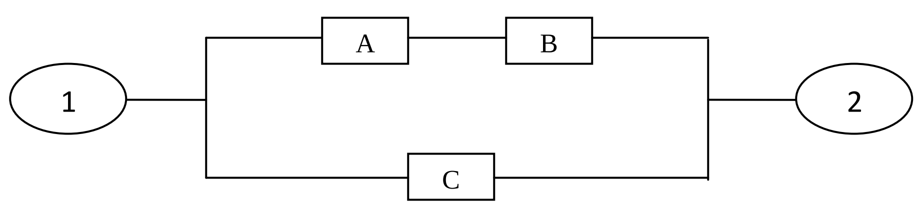
Composant i	A	B	C
Fiabilité $P(i)$	0.90	0.85	0.90

Le composant C fonctionne indépendamment de A et B. Les composants A et B n'opèrent pas indépendamment l'un de l'autre. On sait que la probabilité que le composant A soit en panne sachant que le composant B est en panne est de 0.08.

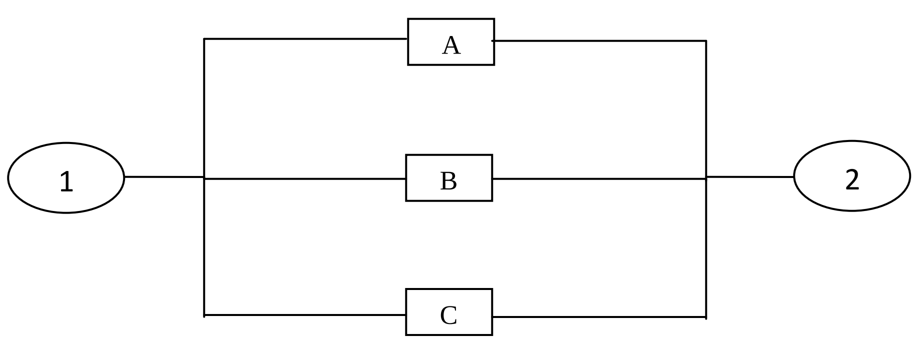
Le système fonctionne lorsqu'il y a au moins un chemin constitué de composants fonctionnels entre les points 1 et 2.

Calculer la fiabilité du système dans les deux cas suivants :

<u>Cas 1</u>



<u>Cas 2</u>



<u>Réponse</u> :

<u>Cas1</u> : (6 points) Fiabilité = $P\big((A\cap B)\cup C\big) = P(A\cap B) + P(C) - P\big(C\cap(A\cap B)\big) = P(A\cap B) + P(C) - P(C)P(A\cap B)$.

Calculer $\mathrm{P}(A\cap B) = 1 - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cup\overline{\mathrm{B}}) = 1 - \big(\mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{B}}) - \mathrm{P}(\overline{\mathrm{A}}\cap\overline{\mathrm{B}})\big)$= 0.762

Finalement Fiabilité = ***0.9762***.

<u>Cas2</u> : (6 points) Fiabilité =$P(A\cup B\cup C) = 1 - P\big((\bar{A}\cap\bar{B})\cap\bar{C}\big) = 1 - P(\bar{C})P(\bar{A}\cap\bar{B})$

$= 1 - P(\bar{C})P(\bar{A}|\bar{B})P(\bar{B}) =$ ***0.9988***.

<u>N.B</u> : On peut procéder autrement pour le développement.

Question 5 (12 points)

Neuf candidats provenant de trois villes différentes (3 de la ville A, 4 de la ville B et 2 de la ville C) sont interviewés pour combler deux postes dans une entreprise.

a) Quelle est la probabilité que les deux candidats retenus proviennent de la même ville si les deux postes son identiques ?

b) Quelle est la probabilité que les deux candidats retenus proviennent de deux villes différentes si un poste est permanent et l'autre est temporaire ?

<u>N.B</u> : Important d'indiquer dans chaque cas le nombre de cas favorables et le nombre de cas possibles.

Question 6 (18 points)

Un enfant ouvre des boites, une après l'autre, contenant chacune N friandises de couleurs différentes jusqu'à ce qu'il choisisse celle qu'il va acheter. De la boite ouverte, il choisit au hasard cinq friandises et décide d'acheter la boite s'il trouve au moins deux friandises rouges parmi les cinq tirées. On suppose que 30% des boites du magasin contiennent 4 friandises rouges, 30% des boites contiennent 5 friandises rouges et les autres boites contiennent 6 friandises rouges.

a) Écrire, en fonction de N, la formule qui donne la probabilité que l'enfant choisisse la boite qu'il vient d'ouvrir.

b) Calculer, approximativement, la probabilité que l'enfant achète la boite qu'il vient d'ouvrir si N = 100.

c) Quelle est la probabilité que l'enfant ouvre au moins 5 boites ?

Réponse :

a) **(6 points)** Soit la variable aléatoire X qui désigne le nombre de friandises rouges que l'enfant a tirées de la boite ouverte.
$X \sim H(N, D, n = 5)$.
D : nombre de friandises rouges dans la boite ouverte
$\Rightarrow D = 4\ ou\ 5\ ou\ 6$

On cherche $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1)$

Par application de la loi des probabilités totales on a :

$P(X \leq 1) = P(X \leq 1|D = 4)P(D = 4) + P(X \leq 1|D = 5)P(D = 5) +$

$P(X \leq 1|D = 6)P(D = 6)$ = $0.3P(X \leq 1|D = 4)$+$0.3P(X \leq 1|D = 5)$+

$0.4P(X \leq 1|D = 6)$=$0.3 * \frac{C_0^4 C_5^{N-4} + C_1^4 C_4^{N-4}}{C_5^N} + 0.3 * \frac{C_0^5 C_5^{N-5} + C_1^5 C_4^{N-5}}{C_5^N} + 0.4 * \frac{C_0^6 C_5^{N-6} + C_1^6 C_4^{N-6}}{C_5^N}$

b) **(6 points)** Ici N= *100* grand et n = *5* petit, on peut alors approximer l'hypergéométrique par une binomiale. On obtient donc : $X \approx B(n = 5, p = \frac{D}{N} = D/100)$.

D=4 ⇒ p = 0.04 et $P(X \leq 1|D = 4) = \sum_{x=0}^{1} C_x^5\ 0.04^x 0.96^{5-x}$ = *0.9852.*

D=5 ⇒ p = 0.05 et $P(X \leq 1|D = 5) = \sum_{x=0}^{1} C_x^5\ 0.05^x 0.95^{5-x}$ = *0.9774.*

D=6 ⇒ p = 0.06 et $P(X \leq 1|D = 6) = \sum_{x=0}^{1} C_x^5\ 0.06^x 0.94^{5-x}$ = *0.9681.*

Donc $P(X \leq 1) = 0.3 * 0.9852 + 0.3 * 0.9774 + 0.4 * 0.9681 = 0.97602$.

Finalement $P(X \geq 2) = 1 - 0.976 = \mathbf{0.024}$.

c) **(6 points)** Soit la variable aléatoire Y qui représente le nombre de boites que l'enfant doit ouvrir pour en acheter une. $Y \sim G(p = 0.024)$

On cherche $P(Y \geq 5) = 1 - (Y \leq 4) = 1 - (1 - (1 - 0.024)^4) = 0.976^4 = \mathbf{0.907}$.