PHS3104 - Mécanique quantique II

Solutionnaire - Devoir #1 – Automne 2013
(Remis le 17 septembre au début du cours)

1.1 Système à 2 niveaux

Un système quantique possède deux états propres caractérisé par :

$$\hat{H}|1\rangle = E_1|1\rangle \quad , \quad \hat{H}|2\rangle = E_2|2\rangle \quad , \quad E_2 - E_1 = \hbar\omega .$$

L'action d'un opérateur sur ces états propres est donné par :

$$\hat{A}|1\rangle = |2\rangle \quad , \quad \hat{A}|2\rangle = |1\rangle .$$

Au temps $t = 0$, une mesure de A donne la valeur –1.

a) Dans quel état se trouve le système au temps $t = 0$?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir la valeur +1 à un temps t subséquent ?

Solution 1.1

a) Selon le Postulat 5 (résultat 1.17), l'état du système correspond à l'état propre lié à la valeur propre « -1 ». Soit l'état propre du système à $t = 0$ (après la mesure) donné par

$$|\psi_0\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle$$

où

$$c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

En appliquant l'opérateur $\hat{A}$, à l'état du système, nous obtenons

$$\hat{A}|\psi_0\rangle = c_1\hat{A}|1\rangle + c_2\hat{A}|2\rangle = c_1|2\rangle + c_2|1\rangle.$$

Or, admettant qu'il s'agit de l'état propre lié à la valeur propre « -1 », nous aurons :

$$\hat{A}|\psi_0\rangle = -|\psi_0\rangle = -c_1|1\rangle - c_2|2\rangle.$$

Comparant ces deux derniers résultats, nous en déduisons que $c_2 = -c_1$, et ainsi, par la condition de normalisation, l'état du système à $t = 0$ est

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle.$$

Solution alternative :

À partir d'une représentation matricielle, les états du système peuvent être caractérisés par

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \; , \; |2\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\hat{A}$ est donc représenté par

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}|1\rangle &= |2\rangle\\ \hat{A}|2\rangle &= |1\rangle\end{aligned}\right\} \Rightarrow \hat{A} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la mesure de $\hat{A}$, à $t = 0$, implique que

$$\hat{A}|\psi_0\rangle = -1|\psi_0\rangle,$$

où, $|\psi_0\rangle$ est l'état du système à $t = 0$. Or, puisque la mesure obtenue est une des valeurs propres de l'opérateur $\hat{A}$, l'état du système correspond donc à un état propre de l'opérateur $\hat{A}$.

L'équation aux valeurs propres

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

donne les valeurs propres λ = +1 ou -1. Le vecteur propre correspondant à la valeur -1 est tel que $c_2 = -c_1$, et par la condition de normalisation, l'état du système à $t = 0$, s'exprime comme

$$|\psi_0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle.$$

b) Connaissant le vecteur d'état (la fonction d'onde) au temps initial, son évolution est donné par la solution à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{\mathrm{H}}\,\Psi.$$

Par séparation de variables, $\Psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r})\tau(t)$, la portion temporelle d'un état propre est donc

$$\tau_n(t) = e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}},$$

ce qui donne

$$\Psi_n = \psi_n e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}.$$

L'état du système en fonction du temps est donc

$$|\Psi(t)\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}.$$

La probabilité d'obtenir une mesure de $+1$ à un temps subséquent, correspond donc à

$$\mathrm{P}_{+1} = |\langle\psi_+|\Psi(t)\rangle|^2,$$

où, $|\psi_{+1}\rangle$ correspond à la fonction propre de $\hat{A}$ dont la valeur propre associée est $\lambda = +1$. On peut montrer que la fonction propre, correspondant à la valeur propre $+1$ de $\hat{A}$, est

$$|\psi_{+1}\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{2}}|2\rangle.$$

En procédant au produit scalaire $|\langle\psi_+|\Psi\rangle|^2$, la probabilité de mesurer $+1$ à un temps subséquent, est donc

$$\mathrm{P}_{+1} = \left|\frac{1}{2}(1 \quad 1)\begin{pmatrix} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} \\ -e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)\left(e^{+i\frac{E_1 t}{\hbar}} - e^{+i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right)}{2} = \frac{1 - cos(\omega\, t)}{2} = sin^2\left(\frac{\omega}{2} t\right)$$

avec $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}$.

1.2 Relation d'incertitude

Calculer l'écart quadratique moyen des opérateurs $\hat{S}_z$ et $\hat{S}_x$ pour un ensemble d'électrons préparés dans l'état

$$|\psi\rangle = \tfrac{4}{5}|\uparrow\rangle + \tfrac{3}{5}|\downarrow\rangle,$$

vérifier la relation d'incertitude

$$\Delta\hat{S}_x^{\ 2}\, \Delta\hat{S}_z^{\ 2} \geq \left(\frac{1}{2i}\left\langle\left[\hat{S}_x, \hat{S}_z\right]\right\rangle\right)^2.$$

Solution 1.2

Par définition

$$\Delta\hat{S}_i^{\ 2} = \langle\hat{S}_i^{\ 2}\rangle - \langle\hat{S}_i\ \rangle^2,$$

avec $i \equiv \{x, z\}$.

Soit, les opérateurs

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que

$$\hat{S}_x^{\ 2} = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \hat{S}_z^{\ 2}.$$

De même, puisque $\langle\psi|\psi\rangle = 1$,

$$\langle\hat{S}_x^{\ 2}\rangle = \langle\hat{S}_y^{\ 2}\rangle = \frac{\hbar^2}{4}.$$

Quant à $\langle\hat{S}_x\ \rangle^2$ et $\langle\hat{S}_z\ \rangle^2$, nous avons

$$\langle\hat{S}_x\ \rangle^2 = \left(\langle\psi|\hat{S}_x|\psi\rangle\right)^2 = \frac{576}{625}\frac{\hbar^2}{4} = \frac{144}{625}\hbar^2$$

$$\langle \hat{S}_z \rangle^2 = \left(\langle\psi|\hat{S}_z|\psi\rangle\right)^2 = \frac{49}{625}\frac{\hbar^2}{4} = \frac{49}{2500}\hbar^2.$$

L'écart quadratique moyen est donc pour chaque opérateur,

$$\Delta\hat{S}_x{}^2 = \langle \hat{S}_x{}^2\rangle - \langle \hat{S}_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left\{1 - \frac{576}{625}\right\} = \frac{49}{2500}\hbar^2$$

$$\Delta\hat{S}_z{}^2 = \langle \hat{S}_z{}^2\rangle - \langle \hat{S}_z \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left\{1 - \frac{49}{625}\right\} = \frac{144}{625}\hbar^2.$$

Nous vérifions si le produit des écarts quadratiques moyens satisfait la relation d'incertitude

$\Delta\hat{S}_x{}^2\Delta\hat{S}_z{}^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[\hat{S}_x,\hat{S}_z]\rangle\right)^2.$

Par les relations de commutation,

$$[\hat{S}_x,\hat{S}_z] = -i\hbar\hat{S}_y.$$

Nous avons donc : $\langle[\hat{S}_x,\hat{S}_z]\rangle = -i\hbar\langle\hat{S}_y\rangle = -i\hbar\langle\psi|\hat{S}_y|\psi\rangle = 0.$

La relation d'incertitude est donc bel et bien vérifiée

$$\Delta\hat{S}_x{}^2\Delta\hat{S}_z{}^2 \geq 0.$$

1.3 Interprétation du spineur

L'état de spin d'un électron isolé est (dans la base usuelle des vecteurs propres de $\hat{S}_z$) :

$$|\chi\rangle = A\begin{pmatrix} 3\sqrt{2}/4 \\ 1+i \end{pmatrix}, \text{ où } A = \text{constante.}$$

a) Normaliser cet état (trouver A).

b) Déterminer la direction (en coordonnées polaires) du moment cinétique de spin.

c) Énoncer les valeurs possibles qui résulteraient d'une mesure de $\hat{S}_y$ et déterminer les probabilités d'obtenir chacune de ces valeurs étant donné l'état initial.

d) Une mesure de $\hat{S}_y$ résulte en la valeur ħ/2. Déterminer la valeur moyenne (espérance mathématique) de $\hat{S}_x$ immédiatement après la mesure de $\hat{S}_y$.

Solution 1.3

a) La normalisation de l'état, $\langle\chi|\chi\rangle = \frac{25}{8}A^2 = 1$, implique $A = \frac{2\sqrt{2}}{5}$,

d'où : $|\chi\rangle = \frac{3}{5}|\uparrow\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}(1 + i)|\downarrow\rangle = \frac{3}{5}|\uparrow\rangle + \frac{2\sqrt{2}}{5}\sqrt{2}e^{i\pi/4}|\downarrow\rangle.$

$$= \frac{3}{5}|\uparrow\rangle + \frac{4}{5}e^{i\pi/4}|\downarrow\rangle\,.$$

b) On compare la forme générale du spineur

$$S(\theta,\varphi) \equiv \begin{pmatrix} \cos\,{}^{\theta}/_{2} \\ e^{i\varphi}\sin\,{}^{\theta}/_{2} \end{pmatrix}.$$

avec l'état du système,

$$|\chi\rangle = \frac{3}{5}|\uparrow\rangle + \frac{4}{5}e^{i\pi/4}|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5}e^{i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

En coordonnées polaires, nous avons donc que

$$\theta = 2arctan\left(\tfrac{4}{3}\right) = 106.3°,$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4} = 45°.$$

c) Soit, l'opérateur $\hat{S}_y$

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs possibles d'une mesure de $\hat{S}_y$, correspondent aux valeurs propres de $\hat{S}_y$,

$$\lambda_1 = \frac{\hbar}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{\hbar}{2}$$

avec les vecteurs propres respectifs,

$$|\uparrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

$$|\downarrow_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Afin de déterminer la probabilité de mesurer l'une des valeurs propres de l'opérateur $\hat{S}_y$, exprimons l'état du système selon la base $|\uparrow_y\rangle$ et $|\downarrow_y\rangle$,

$$|\chi\rangle = C_1|\uparrow_y\rangle + C_2|\downarrow_y\rangle$$

avec,

$$C_1^2 + C_2^2 = 1.$$

La probabilité de mesurer $\frac{\hbar}{2}$ est donc,

$$\mathrm{P}_+ = C_1^2 = \left|\langle\uparrow_y|\chi\rangle\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ i\frac{4}{5}e^{i\pi/4}\end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{12}{25}\sin{}^{\pi}/_{4} = 0.84$$

et la probabilité de mesurer - $\frac{\hbar}{2}$,

$$\mathrm{P}_- = C_2^2 = \left|\langle\downarrow_y|\chi\rangle\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{3}{5}\\ i\frac{4}{5}e^{i\pi/4}\end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{12}{25}\sin{}^{\pi}/_{4} = 0.16.$$

d) Immédiatement après la mesure de $\hat{S}_y$, l'état du système se trouve dans l'état propre $|\uparrow_y\rangle$ correspondant à la valeur propre mesurée de $\frac{\hbar}{2}$.

La valeur moyenne de $\hat{S}_x$ immédiatement après la mesure de $\hat{S}_y$,

$$\langle\uparrow_y|\hat{S}_x|\uparrow_y\rangle = \frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$$

$$= 0.$$

1.4 Évolution du spineur en présence de champ magnétique

On considère le spin d'un électron isolé. Une mesure de S_y résulte en la valeur ħ/2. À partir de cet état préparé (mesure de $\hat{S}_y$ donnant ħ/2), l'électron est soumis à un champ magnétique B parallèle à l'axe z.

a) Écrire l'Hamiltonien du système en notation matricielle 2x2.

b) Déterminer la valeur moyenne de $\hat{S}_y$ en fonction du temps.

Solution 1.4

a) L'Hamiltonien d'un électron isolé en présence d'un champ magnétique se définit comme

$$\hat{H} = -|\gamma|\hat{\mathbf{S}}\cdot\mathbf{B} = -\mu_B\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\mathbf{B}$$

où γ est le rapport gyromagnétique de la particule de moment cinétique de spin $\vec{S}$.

En considérant que le champ appliqué est

$$\vec{B} = B_0\hat{z},$$

l'Hamiltonien du système est donc,

$$\hat{H} = -\gamma B_0 S_z = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

b) **Solution 1 – Opérateur d'évolution temporelle :**

L'état du système correspond à un vecteur propre de l'opérateur S_y, qui peut être exprimé par une superposition des états propres de l'Hamiltonien,

$$|\psi\rangle = c_1|\uparrow\rangle + c_2|\downarrow\rangle, \text{ avec } c_1^2 + c_2^2 = 1.$$

La mesure de $\hat{S}_y$ correspond à l'équation aux valeurs propres

$$\hat{S}_y|\psi\rangle = \frac{\hbar}{2}|\psi\rangle,$$

avec

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}.$$

Nous trouvons, après substitution de l'état général dans l'équation aux valeurs propres, l'état du système juste après la mesure de S_y

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle.$$

Pour trouver l'évolution de cet état en fonction du temps, on le multiplie par l'opérateur d'évolution,

$$\hat{U} = \begin{pmatrix}e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} & 0\\ 0 & e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\end{pmatrix},$$

où E_1 et E_2 sont les valeurs propres de l'Hamiltonien, ce qui donne

$$|\Psi(\mathrm{t})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \frac{i}{\sqrt{2}}|\downarrow\rangle e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}.$$

Note : nous sommes dans la base des vecteurs propres de $\hat{H}$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},$$

avec les valeurs propres respectives,

$$E_1 = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2}$$
$$E_2 = \frac{\gamma B_0 \hbar}{2}.$$

La valeur moyenne dans le temps de $\hat{S}_y$ est donc,

$$\langle \Psi(\mathrm{t}) | \hat{S}_y | \Psi(\mathrm{t}) \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} e^{i\frac{E_1 t}{\hbar}} & -ie^{i\frac{E_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} \\ ie^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{\hbar} t\right) = \frac{\hbar}{2} \cos(\omega t), \quad \text{où } \omega = \frac{2\mu_B}{\hbar}.$$

Solution 2 – Équation d'Heisenberg :

Suivant le point de vue d'Heisenberg, c'est l'opérateur (plutôt que la fonction d'onde) qui dépend du temps, suivant l'équation (1.11b dans le coffre d'outils)

$$\frac{d}{dt}\left\langle \left(\hat{S}_y(t)\right)_H \right\rangle = \left\langle \hat{U}^\dagger \left(\frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \left(\hat{S}_y\right)_S\right] + \frac{\partial \left(\hat{S}_y\right)_S}{\partial t} \right) \hat{U} \right\rangle$$

(plutôt que l'équation de Schrödinger), où

$$\hat{H} = -\frac{\gamma B_0 \hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\hat{S}_y)_S = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici, $(\hat{S}_y)_S$ ne dépend pas explicitement du temps, donc

$$\langle \frac{\partial (\hat{S}_y)_S}{\partial t} \rangle = 0,$$

et

$$[\hat{H}, (\hat{S}_y)_S] = -\frac{\gamma B_0 \hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Afin de déterminer la valeur moyenne de $\hat{S}_y$ en fonction du temps, on résout l'équation d'Heisenberg

$$\frac{d}{dt}\left\langle \begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\omega_1 t} & 0 \\ 0 & e^{i\omega_2 t} \end{pmatrix}}_{\hat{U}^\dagger} \frac{i}{\hbar} \left(\frac{i\gamma B_0 \hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-i\omega_1 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega_2 t} \end{pmatrix}}_{\hat{U}} \right\rangle,$$

avec la condition initiale

$$\begin{pmatrix} S_{11}(0) & S_{12}(0) \\ S_{21}(0) & S_{22}(0) \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Après simplifications, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} S_{11}(t) & S_{12}(t) \\ S_{21}(t) & S_{22}(t) \end{pmatrix}}_{\hat{S}_y} \right\rangle = \left\langle -\mu_B B_0 \begin{pmatrix} 0 & e^{-i(\omega_2-\omega_1)t} \\ e^{i(\omega_2-\omega_1)t} & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{S}_y(t) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i(\omega_2-\omega_1)t} \\ ie^{i(\omega_2-\omega_1)t} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \left((\omega_2-\omega_1) = \frac{2\mu_B B_0}{\hbar} = \omega \right)$$

Ce qui nous permet de calculer la valeur moyenne :

$$\left\langle \hat{S}_y(t) \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{-i\omega t} \\ ie^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{4}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right) = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t).$$

Solution 3 – Opérateur densité :

L'opérateur densité initial (suite à la mesure de S_y) est

$$\hat{\rho}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

L'équation d'évolution de l'opérateur, étant donné l'hamiltonien, s'écrit

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{-i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] = \frac{i\mu_B B}{\hbar}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right] = \frac{i2\mu_B B}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & \rho_{12} \\ -\rho_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenant compte des conditions initiales, la solution est

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i\omega\rho_{12} \\ -i\omega\rho_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{\rho}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\omega t} \\ ie^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui nous permet d'obtenir la valeur moyenne

$$\left\langle \hat{S}_y \right\rangle = Tr\left\{\hat{\rho}(t)\hat{S}_y\right\} = Tr\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -ie^{i\omega t} \\ ie^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\right\} = Tr\left\{\frac{\hbar}{4}\begin{pmatrix} e^{i\omega t} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega t} \end{pmatrix}\right\} = \frac{\hbar}{2}\cos(\omega t).$$